Une version orientée de la 1-2-3 Conjecture

Olivier Baudon, Julien Bensmail, Éric Sopena

LaBRI - Université de Bordeaux
Talence, France

JGA 2013
13 Novembre 2013

Partie 1 : Motivation du problème

Partie 2 : On a $ch'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 3$ pour tout graphe orienté $\overrightarrow{G}$

Partie 3 : Décider si $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 2$ est NP-complet

Partie 4 : Conclusions et perspectives

Partie 1 : Motivation du problème

Partie 2 : On a $ch'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 3$ pour tout graphe orienté $\overrightarrow{G}$

Partie 3 : Décider si $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 2$ est NP-complet

Partie 4 : Conclusions et perspectives

Motivation du problème

Graphe *régulier* : tous les sommets sont de *même* degré.

Graphe *irrégulier* : tous les sommets sont de degrés *différents*.

Motivation du problème

Graphe *régulier* : tous les sommets sont de *même* degré.

Graphe *irrégulier* : tous les sommets sont de degrés *différents*.

Problème : un graphe simple non-trivial ne peut pas être irrégulier.

Chartrand et al. (1988)

Combien de fois *au minimum* faut-il multiplier chaque arête d'un graphe simple G pour obtenir un multigraphe irrégulier ?

Motivation du problème

Graphe *régulier* : tous les sommets sont de *même* degré.

Graphe *irrégulier* : tous les sommets sont de degrés *différents*.

Problème : un graphe simple non-trivial ne peut pas être irrégulier.

Chartrand et al. (1988)

Combien de fois *au minimum* faut-il multiplier chaque arête d'un graphe simple G pour obtenir un multigraphe irrégulier ?

De manière équivalente, quel est le plus petit nombre de couleurs utilisées par une $\{1, 2, ..., k\}$-coloration (impropre) des arêtes *globalement somme-distinguante* de G, i.e. telle qu'il n'y ait pas deux sommets avec la même somme de poids incidents (*degré pondéré*) ?

Motivation du problème

Graphe *régulier* : tous les sommets sont de *même* degré.

Graphe *irrégulier* : tous les sommets sont de degrés *différents*.

Problème : un graphe simple non-trivial ne peut pas être irrégulier.

Chartrand et al. (1988)

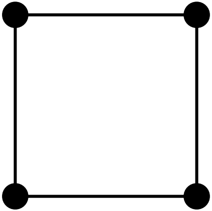
Combien de fois *au minimum* faut-il multiplier chaque arête d'un graphe simple G pour obtenir un multigraphe irrégulier ?

De manière équivalente, quel est le plus petit nombre de couleurs utilisées par une $\{1, 2, ..., k\}$-coloration (impropre) des arêtes *globalement somme-distinguante* de G, i.e. telle qu'il n'y ait pas deux sommets avec la même somme de poids incidents (*degré pondéré*) ?

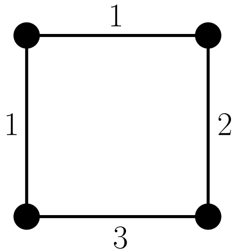
Nierhoff (2000)

G admet nécessairement une telle $\{1, 2, ..., |V(G)| - 1\}$-coloration.

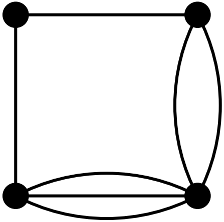
Exemple



Exemple



Exemple



Motivation du problème

Graphe *irrégulier* : *tous* les sommets sont de degrés différents.

Graphe *localement irrégulier* : les sommets *adjacents* sont de degrés différents.

Motivation du problème

Graphe *irrégulier* : *tous* les sommets sont de degrés différents.

Graphe *localement irrégulier* : les sommets *adjacents* sont de degrés différents.

Similairement, on veut transformer un graphe G non-localement irrégulier en un multigraphe localement irrégulier, et ce en minimisant les multiplications d'arêtes.

On cherche donc le plus petit nombre $\chi'_{nsd}(G)$ de couleurs d'une coloration *localement somme-distinguante* des arêtes de G.

1-2-3 Conjecture - Karoński, Łuczak, Thomason (2004)

On a $\chi'_{nsd}(G) \leq 3$ pour tout graphe G sans arête isolée.

Problématique principale

On s'intéresse à la même question dans le cadre des graphes orientés.

Problématique principale

On s'intéresse à la même question dans le cadre des graphes orientés.

Graphe localement irrégulier : les sommets adjacents sont de *degrés* différents.

Graphe orienté localement irrégulier : les sommets adjacents sont de *degrés sortant* différents.

Problématique principale

On s'intéresse à la même question dans le cadre des graphes orientés.

Graphe localement irrégulier : les sommets adjacents sont de *degrés* différents.

Graphe orienté localement irrégulier : les sommets adjacents sont de *degrés sortant* différents.

Comme d'habitude, on cherche le plus petit nombre $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G})$ de couleurs utilisées par une coloration *localement somme-distinguante* des arcs de $\overrightarrow{G}$, i.e. via laquelle deux sommets adjacents ont des *dégrés sortant pondérés* différents.

Problématique principale

On s'intéresse à la même question dans le cadre des graphes orientés.

Graphe localement irrégulier : les sommets adjacents sont de *degrés* différents.

Graphe orienté localement irrégulier : les sommets adjacents sont de *degrés sortant* différents.

Comme d'habitude, on cherche le plus petit nombre $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G})$ de couleurs utilisées par une coloration *localement somme-distinguante* des arcs de $\overrightarrow{G}$, i.e. via laquelle deux sommets adjacents ont des *dégrés sortant pondérés* différents.

Question

A-t-on $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 3$ pour tout graphe orienté $\overrightarrow{G}$?

Si oui, ce serait optimal puisque $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{C_3}) = 3$.

Partie 1 : Motivation du problème

Partie 2 : On a $ch'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 3$ pour tout graphe orienté $\overrightarrow{G}$

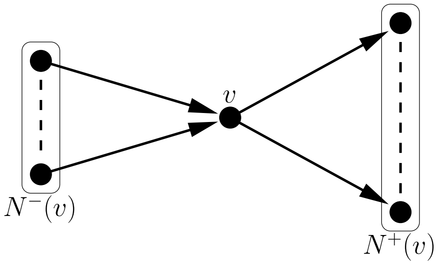
Partie 3 : Décider si $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 2$ est NP-complet

Partie 4 : Conclusions et perspectives

Réponse : oui !

Preuve par induction sur le nombre d'arcs.

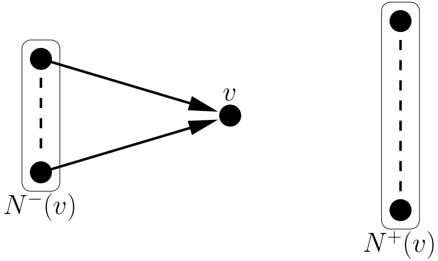
Choisir un sommet v vérifiant $d^-(v) \leq d^+(v)$.



Réponse : oui !

Preuve par induction sur le nombre d'arcs.

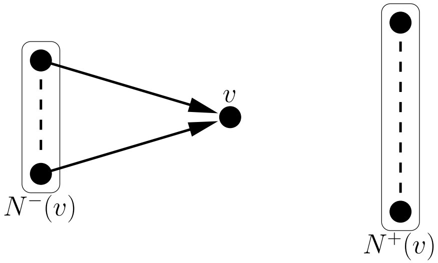
Choisir un sommet v vérifiant $d^-(v) \leq d^+(v)$.



Réponse : oui !

Preuve par induction sur le nombre d'arcs.

Choisir un sommet v vérifiant $d^-(v) \leq d^+(v)$.



Ce sous-graphe admet une 3-coloration localement somme-distinguante de ses arcs (induction). On essaye de l'étendre aux arcs sortants de v :

- $2d^+(v) + 1$ degrés sortant pondérés potentiels pour v...
- ... mais $d^-(v) + d^+(v) \leq 2d^+(v)$ degrés sortant pondérés "bloqués".

Et donc au moins une "couleur" libre pour v. ∎

Ce n'est pas tout...

La preuve marche car, avec les poids de $\{1, 2, 3\}$, on a le "choix" entre $2d + 1$ degrés sortant pondérés possibles pour un sommet v de degré sortant d, alors que v a moins de voisins (et donc de "couleurs" interdites).

Ce n'est pas tout...

La preuve marche car, avec les poids de $\{1, 2, 3\}$, on a le “choix” entre $2d + 1$ degrés sortant pondérés possibles pour un sommet v de degré sortant d, alors que v a moins de voisins (et donc de “couleurs” interdites).

Mais cet argument est en fait valable pour tout triplet $\{a, b, c\}$ de poids réels utilisés pour pondérer les arcs sortants de v (se prouve facilement par induction sur d), et ne dépend pas des trois poids utilisés pour pondérer les arcs sortants des voisins de v.

Baudon, B., Sopena (2013+)

On a $ch'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 3$ pour tout graphe orienté $\overrightarrow{G}$.

Partie 1 : Motivation du problème

Partie 2 : On a $ch'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 3$ pour tout graphe orienté $\overrightarrow{G}$

Partie 3 : Décider si $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 2$ est NP-complet

Partie 4 : Conclusions et perspectives

Et maintenant... ?

Quand deux couleurs suffisent-elles ?

Baudon, B., Sopena (2013+)

On a $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 2$ lorsque

- $\chi(und(\overrightarrow{G})) \leq 2$,
- $\overrightarrow{G}$ est acircuitique,
- $\overrightarrow{G}$ est un tournoi avec au plus $k+1$ sommets de degrés sortant k,
- $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{G_1} \Box \overrightarrow{G_2}$ avec $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G_1}), \chi'_{nsd}(\overrightarrow{G_2}) \leq 2$.

Et maintenant... ?

Quand deux couleurs suffisent-elles ?

Baudon, B., Sopena (2013+)

On a $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 2$ lorsque

- $\chi(und(\overrightarrow{G})) \leq 2$,
- $\overrightarrow{G}$ est acircuitique,
- $\overrightarrow{G}$ est un tournoi avec au plus $k+1$ sommets de degrés sortant k,
- $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{G_1} \Box \overrightarrow{G_2}$ avec $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G_1}), \chi'_{nsd}(\overrightarrow{G_2}) \leq 2$.

Une bonne caractérisation existe-t-elle ?

Réponse : non !

$2\text{-}\textsc{nsd} = \{$Un graphe orienté $\overrightarrow{G}$: a-t-on $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 2$?$\}$

Baudon, B., Sopena (2013+)

Le problème $2\text{-}\textsc{nsd}$ est NP-complet.

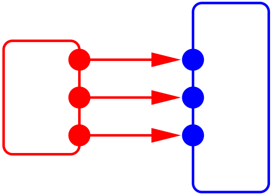
Réponse : non !

$2\text{-}\textsc{nsd} = \{$Un graphe orienté $\overrightarrow{G}$: a-t-on $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 2$?$\}$

Baudon, B., Sopena (2013+)

Le problème $2\text{-}\textsc{nsd}$ est NP-complet.

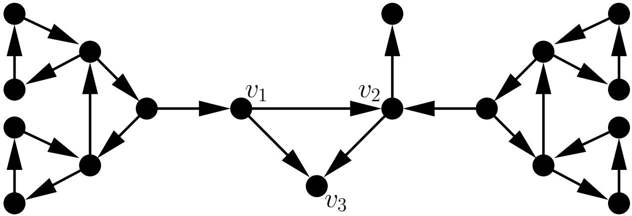
On utilise des gadgets “bloquants” s’utilisant comme suit.



Colorier la composante rouge “bloque” certains degrés sortant pondérés pour les sommets bleus, mais n’affecte pas leurs degrés sortant pondérés.

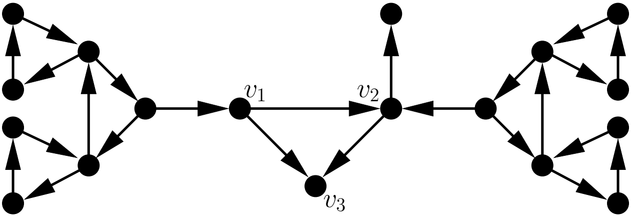
Gadgets bloquants $\overrightarrow{F_{2k-1,2k}}$

Le gadget $\overrightarrow{F_{3,4}}$ permet de bloquer les degrés sortant pondérés 3 et 4.

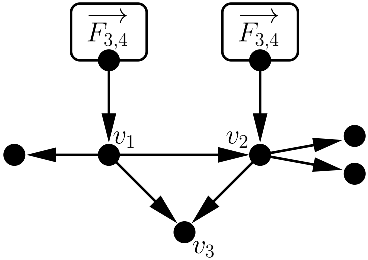


Gadgets bloquants $\overrightarrow{F_{2k-1,2k}}$

Le gadget $\overrightarrow{F_{3,4}}$ permet de bloquer les degrés sortant pondérés 3 et 4.

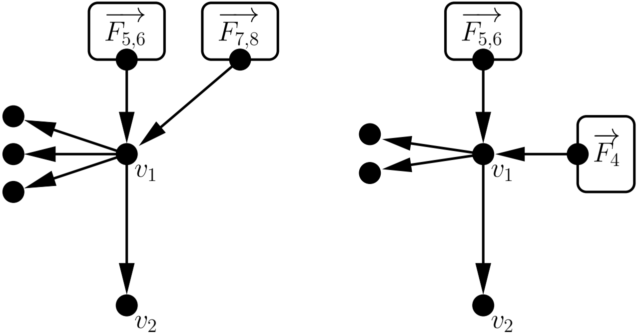


Se généralise à $\overrightarrow{F_{2k-1,2k}}$ (bloque $2k-1$ et $2k$) en utilisant le fait que l'on puisse bloquer les degrés sortant pondérés précédents, e.g. $\overrightarrow{F_{5,6}}$:



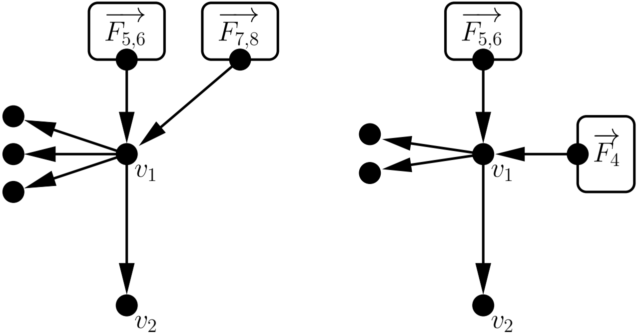
Gadgets bloquants $\overrightarrow{F_k}$

En utilisant les gadgets précédents, on peut ensuite bloquer un seul degré sortant pondéré.



Gadgets bloquants $\overrightarrow{F_k}$

En utilisant les gadgets précédents, on peut ensuite bloquer un seul degré sortant pondéré.



Grâce à ces gadgets, on peut “forcer” un sommet à avoir un degré sortant pondéré dans un certain intervalle de valeurs autorisées.

Preuve de NP-complétude

Baudon, B., Sopena (2013+)

Le problème 2-NSD est NP-complet.

Réduction depuis $3\mathrm{SAT}$. Étant donnée une formule F, on construit un graphe $\overrightarrow{G_F}$ tel que

$$F \text{ est satisfiable} \Leftrightarrow \chi'_{nsd}(\overrightarrow{G_F}) \leq 2.$$

Preuve de NP-complétude

Baudon, B., Sopena (2013+)

Le problème 2-NSD est NP-complet.

Réduction depuis $3\mathrm{SAT}$. Étant donnée une formule F, on construit un graphe $\overrightarrow{G_F}$ tel que

$$F \text{ est satisfiable} \Leftrightarrow \chi'_{nsd}(\overrightarrow{G_F}) \leq 2.$$

À chaque variable x de F, on associe deux entiers $t(x)$ et $f(x)$ de manière unique. Si $\ell_i = x$ et $\ell_{i'} = \overline{x}$, on pose

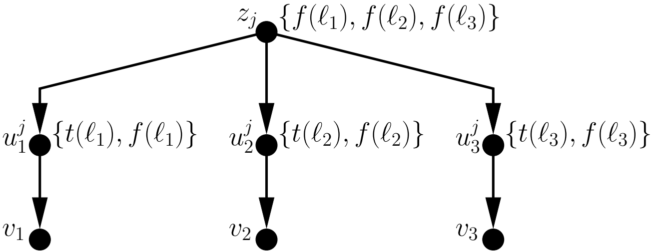
- $t(\ell_i) = t(x)$ et $f(\ell_i) = f(x)$,
- $t(\ell_{i'}) = f(x)$ et $f(\ell_{i'}) = t(x)$.

Preuve de NP-complétude

Baudon, B., Sopena (2013+)

Le problème 2-NSD est NP-complet.

À chaque clause $C_j = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$, on associe le gadget suivant.



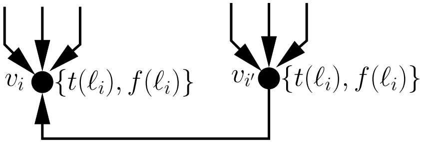
$\Rightarrow$) Les trois litéraux de C_j ne peuvent pas être tous évalués faux.

Preuve de NP-complétude

Baudon, B., Sopena (2013+)

Le problème 2-NSD est NP-complet.

Pour tout couple de litéraux $\{\ell_i, \ell_{i'}\}$ avec $\ell_{i'} = \overline{\ell_i}$, on utilise la construction suivante.



$\Rightarrow$) ℓ_i a la même valeur de vérité dans toutes les clauses qui le contiennent.

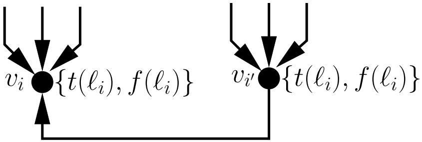
$\Rightarrow$) ℓ_i et $\overline{\ell_i}$ n'ont pas la même valeur de vérité.

Preuve de NP-complétude

Baudon, B., Sopena (2013+)

Le problème 2-NSD est NP-complet.

Pour tout couple de litéraux $\{\ell_i, \ell_{i'}\}$ avec $\ell_{i'} = \overline{\ell_i}$, on utilise la construction suivante.



$\Rightarrow$) ℓ_i a la même valeur de vérité dans toutes les clauses qui le contiennent.

$\Rightarrow$) ℓ_i et $\overline{\ell_i}$ n'ont pas la même valeur de vérité.

D'une 2-coloration localement somme-distinguante des arcs de $\overrightarrow{G_F}$, on peut déduire une affectation satisfaisant F, et vice-versa. ■

Partie 1 : Motivation du problème

Partie 2 : On a $ch'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 3$ pour tout graphe orienté $\overrightarrow{G}$

Partie 3 : Décider si $\chi'_{nsd}(\overrightarrow{G}) \leq 2$ est NP-complet

Partie 4 : Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

- Pour quelles classes de graphes orientés le résultat de complétude tient-il ?
- Quid d'une version similaire de la 1-2 Conjecture ?
- Distinguer des sommets plus éloignés ?
- ...

Conclusions et perspectives

- Pour quelles classes de graphes orientés le résultat de complétude tient-il ?
- Quid d'une version similaire de la 1-2 Conjecture ?
- Distinguer des sommets plus éloignés ?
- ...

Merci pour votre attention !