

Coloration localement irrégulière des arêtes d'un graphe

O. Baudon¹, J. Bensmail¹, J. Przybyło², E. Sopena¹, M. Woźniak²

1 : LaBRI, Université de Bordeaux (Talence - France)

2 : AGH University of Science and Technology (Cracovie - Pologne)

GT G&A - LaBRI

22 mars 2013



Partie 1 : Distinguer les sommets d'un graphe par une coloration

Partie 2 : Décomposer un graphe en sous-graphes localement irréguliers

Partie 3 : Résultat de complexité

Partie 4 : Conclusions et questions ouvertes

Plusieurs paramètres entrent en compte.

Plusieurs paramètres entrent en compte.

- Le **type de coloration**.
 - des sommets, des arêtes, totale, ...
 - propre, impropre, ...

Plusieurs paramètres entrent en compte.

- Le **type de coloration**.
 - des sommets, des arêtes, totale, ...
 - propre, impropre, ...
- L'**étendue de la distinction**.
 - globale, locale, ...

Plusieurs paramètres entrent en compte.

- Le **type de coloration**.
 - des sommets, des arêtes, totale, ...
 - propre, impropre, ...
- L'**étendue de la distinction**.
 - globale, locale, ...
- Les **conditions de distinction**.
 - relatives aux paramètres précédents.

Plusieurs paramètres entrent en compte.

- Le **type de coloration**.
 - des sommets, des arêtes, totale, ...
 - propre, impropre, ...
- L'**étendue de la distinction**.
 - globale, locale, ...
- Les **conditions de distinction**.
 - relatives aux paramètres précédents.

Ici, nous cherchons à distinguer les sommets adjacents d'un graphe au moyen d'une coloration impropre de ses arêtes.

Soit $\phi : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ une k -coloration des arêtes de G .

Def. Degré pondéré - Somme-distinction

Le *degré pondéré par ϕ* d'un sommet v de G , dénoté $s_\phi(v)$, est $\sum_{u \in N(v)} \phi(uv)$. On dit que ϕ est *somme-distinguante* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $s_\phi(u) \neq s_\phi(v)$.

Tout graphe sans arête isolée admet une coloration somme-distinguante de ses arêtes.

Soit $\phi : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ une k -coloration des arêtes de G .

Def. Degré pondéré - Somme-distinction

Le *degré pondéré par ϕ* d'un sommet v de G , dénoté $s_\phi(v)$, est $\sum_{u \in N(v)} \phi(uv)$. On dit que ϕ est *somme-distinguante* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $s_\phi(u) \neq s_\phi(v)$.

Tout graphe sans arête isolée admet une coloration somme-distinguante de ses arêtes.

Cnj. Conjecture 1-2-3 - Karoński, Łuczak et Thomason (2004)

Tout graphe colorable admet une 3-coloration somme-distinguante de ses arêtes.

Plusieurs tentatives successives d'approcher la Conjecture 1-2-3.

Soit $\phi : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ une k -coloration des arêtes de G .

Def. Degré pondéré - Somme-distinction

Le *degré pondéré par ϕ* d'un sommet v de G , dénoté $s_\phi(v)$, est $\sum_{u \in N(v)} \phi(uv)$. On dit que ϕ est *somme-distinguante* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $s_\phi(u) \neq s_\phi(v)$.

Tout graphe sans arête isolée admet une coloration somme-distinguante de ses arêtes.

Cnj. Conjecture 1-2-3 - Karoński, Łuczak et Thomason (2004)

Tout graphe colorable admet une 3-coloration somme-distinguante de ses arêtes.

Plusieurs tentatives successives d'approcher la Conjecture 1-2-3.

Thm. Kalkowski, Karoński et Pfender (2010)

Tout graphe colorable admet une 5-coloration somme-distinguante de ses arêtes.

Def. Code couleur - Détection

Le *code couleur de v par ϕ* , dénoté $code_{\phi}(v)$, est le k -tuple ordonné (a_1, \dots, a_k) où a_i est le nombre d'arêtes incidentes à v colorées k . On dit que ϕ est *détectable* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $code_{\phi}(u) \neq code_{\phi}(v)$.

Comme pour la coloration d'arêtes somme-distinguante, tout graphe sans arête isolée admet une coloration détectable de ses arêtes.

Def. Code couleur - Détection

Le *code couleur de v par ϕ* , dénoté $code_{\phi}(v)$, est le k -tuple ordonné (a_1, \dots, a_k) où a_i est le nombre d'arêtes incidentes à v colorées k . On dit que ϕ est *détectable* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $code_{\phi}(u) \neq code_{\phi}(v)$.

Comme pour la coloration d'arêtes somme-distinguante, tout graphe sans arête isolée admet une coloration détectable de ses arêtes.

Cnj. Conjecture de Détection - Addario-Berry, Aldred, Dalal et Reed (2005)

Tout graphe colorable admet une 3-coloration détectable de ses arêtes.

La Conjecture de Détection est vérifiée pour un grand nombre de graphes.

Def. Code couleur - Détection

Le *code couleur de v par ϕ* , dénoté $code_{\phi}(v)$, est le k -tuple ordonné (a_1, \dots, a_k) où a_i est le nombre d'arêtes incidentes à v colorées k . On dit que ϕ est *détectable* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $code_{\phi}(u) \neq code_{\phi}(v)$.

Comme pour la coloration d'arêtes somme-distinguante, tout graphe sans arête isolée admet une coloration détectable de ses arêtes.

Cnj. Conjecture de Détection - Addario-Berry, Aldred, Dalal et Reed (2005)

Tout graphe colorable admet une 3-coloration détectable de ses arêtes.

La Conjecture de Détection est vérifiée pour un grand nombre de graphes.

Thm. Addario-Berry, Aldred, Dalal et Reed (2005)

Tout graphe colorable admet une 4-coloration détectable de ses arêtes.



Partie 1 : Distinguer les sommets d'un graphe par une coloration

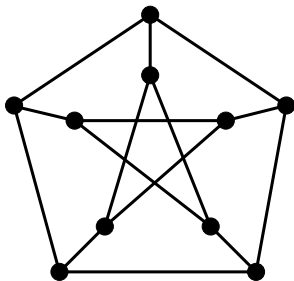
Partie 2 : Décomposer un graphe en sous-graphes localement irréguliers

Partie 3 : Résultat de complexité

Partie 4 : Conclusions et questions ouvertes

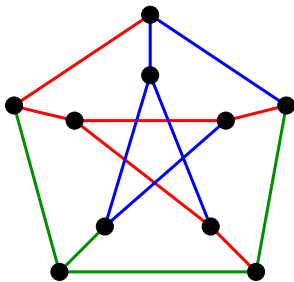
Def. Irrégularité locale

On dit que G est *localement irrégulier* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $d(u) \neq d(v)$. Si le sous-graphe de G induit par chacune des k couleurs de ϕ est localement irrégulier, alors on dit que ϕ est *localement irrégulière*.



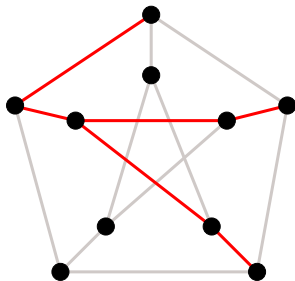
Def. Irrégularité locale

On dit que G est *localement irrégulier* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $d(u) \neq d(v)$. Si le sous-graphe de G induit par chacune des k couleurs de ϕ est localement irrégulier, alors on dit que ϕ est *localement irrégulière*.



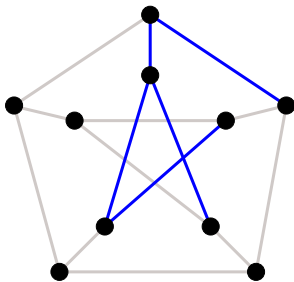
Def. Irrégularité locale

On dit que G est *localement irrégulier* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $d(u) \neq d(v)$. Si le sous-graphe de G induit par chacune des k couleurs de ϕ est localement irrégulier, alors on dit que ϕ est *localement irrégulière*.



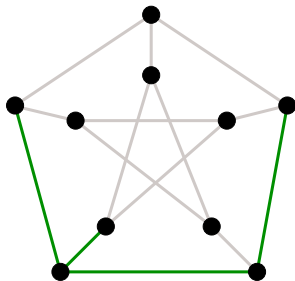
Def. Irrégularité locale

On dit que G est *localement irrégulier* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $d(u) \neq d(v)$. Si le sous-graphe de G induit par chacune des k couleurs de ϕ est localement irrégulier, alors on dit que ϕ est *localement irrégulière*.



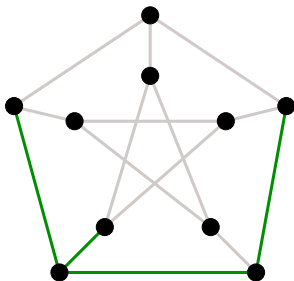
Def. Irrégularité locale

On dit que G est *localement irrégulier* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $d(u) \neq d(v)$. Si le sous-graphe de G induit par chacune des k couleurs de ϕ est localement irrégulier, alors on dit que ϕ est *localement irrégulière*.



Def. Irrégularité locale

On dit que G est *localement irrégulier* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets adjacents dans G on a $d(u) \neq d(v)$. Si le sous-graphe de G induit par chacune des k couleurs de ϕ est localement irrégulier, alors on dit que ϕ est *localement irrégulière*.



Def. Index chromatique irrégulier

L'*index chromatique irrégulier* de G , dénoté $\chi'_{irr}(G)$, est le plus petit nombre de couleurs utilisées par une coloration localement irrégulière des arêtes de G .

Cnj. Conjecture d'Irrégularité Locale - Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout graphe *colorable* G , on a $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.

La Conjecture d'Irrégularité Locale implique *pratiquement* la Conjecture de Détection. En revanche, pas de lien systématique avec la Conjecture 1-2-3.

Cnj. Conjecture d'Irrégularité Locale - Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout graphe *colorable* G , on a $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.

La Conjecture d'Irrégularité Locale implique *pratiquement* la Conjecture de Détection. En revanche, pas de lien systématique avec la Conjecture 1-2-3.

Soient P_n (resp. C_n) la chaîne (resp. le cycle) à $n \geq 3$ sommets.

Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

$$\chi'_{irr}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{si } n \geq 5 \text{ est impair} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\chi'_{irr}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 3 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$



Cnj. Conjecture d'Irrégularité Locale - Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout graphe *colorable* G , on a $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.

La Conjecture d'Irrégularité Locale implique *pratiquement* la Conjecture de Détection. En revanche, pas de lien systématique avec la Conjecture 1-2-3.

Soient P_n (resp. C_n) la chaîne (resp. le cycle) à $n \geq 3$ sommets.

Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

$$\chi'_{irr}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{si } n \geq 5 \text{ est impair} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\chi'_{irr}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 3 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$



Cnj. Conjecture d'Irrégularité Locale - Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout graphe *colorable* G , on a $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.

La Conjecture d'Irrégularité Locale implique *pratiquement* la Conjecture de Détection. En revanche, pas de lien systématique avec la Conjecture 1-2-3.

Soient P_n (resp. C_n) la chaîne (resp. le cycle) à $n \geq 3$ sommets.

Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

$$\chi'_{irr}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{si } n \geq 5 \text{ est impair} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\chi'_{irr}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 3 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$



Cnj. Conjecture d'Irrégularité Locale - Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout graphe *colorable* G , on a $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.

La Conjecture d'Irrégularité Locale implique *pratiquement* la Conjecture de Détection. En revanche, pas de lien systématique avec la Conjecture 1-2-3.

Soient P_n (resp. C_n) la chaîne (resp. le cycle) à $n \geq 3$ sommets.

Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

$$\chi'_{irr}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{si } n \geq 5 \text{ est impair} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\chi'_{irr}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 3 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$



Cnj. Conjecture d'Irrégularité Locale - Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout graphe *colorable* G , on a $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.

La Conjecture d'Irrégularité Locale implique *pratiquement* la Conjecture de Détection. En revanche, pas de lien systématique avec la Conjecture 1-2-3.

Soient P_n (resp. C_n) la chaîne (resp. le cycle) à $n \geq 3$ sommets.

Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

$$\chi'_{irr}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{si } n \geq 5 \text{ est impair} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\chi'_{irr}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 3 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$



Les chaînes et cycles impairs ne sont pas les seuls graphes non-colorables.

Les chaînes et cycles impairs ne sont pas les seuls graphes non-colorables.

Soit \mathcal{T} la famille suivante. Initialement, K_3 appartient à \mathcal{T} . Puis, prenons :

- un graphe de \mathcal{T} ayant un triangle dont l'un des sommets v est de degré 2 ;
- un graphe auxiliaire H étant soit une chaîne de longueur paire ou une chaîne de longueur impaire dont l'une des extrémités est collée à un triangle.

Le graphe obtenu en identifiant v et un sommet de degré 1 de H appartient alors à \mathcal{T} .

Les chaînes et cycles impairs ne sont pas les seuls graphes non-colorables.

Soit \mathcal{T} la famille suivante. Initialement, K_3 appartient à \mathcal{T} . Puis, prenons :

- un graphe de \mathcal{T} ayant un triangle dont l'un des sommets v est de degré 2 ;
- un graphe auxiliaire H étant soit une chaîne de longueur paire ou une chaîne de longueur impaire dont l'une des extrémités est collée à un triangle.

Le graphe obtenu en identifiant v et un sommet de degré 1 de H appartient alors à \mathcal{T} .

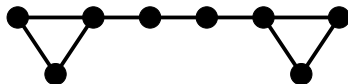


Les chaînes et cycles impairs ne sont pas les seuls graphes non-colorables.

Soit \mathcal{T} la famille suivante. Initialement, K_3 appartient à \mathcal{T} . Puis, prenons :

- un graphe de \mathcal{T} ayant un triangle dont l'un des sommets v est de degré 2 ;
- un graphe auxiliaire H étant soit une chaîne de longueur paire ou une chaîne de longueur impaire dont l'une des extrémités est collée à un triangle.

Le graphe obtenu en identifiant v et un sommet de degré 1 de H appartient alors à \mathcal{T} .

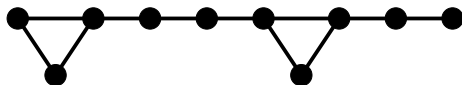


Les chaînes et cycles impairs ne sont pas les seuls graphes non-colorables.

Soit \mathcal{T} la famille suivante. Initialement, K_3 appartient à \mathcal{T} . Puis, prenons :

- un graphe de \mathcal{T} ayant un triangle dont l'un des sommets v est de degré 2 ;
- un graphe auxiliaire H étant soit une chaîne de longueur paire ou une chaîne de longueur impaire dont l'une des extrémités est collée à un triangle.

Le graphe obtenu en identifiant v et un sommet de degré 1 de H appartient alors à \mathcal{T} .



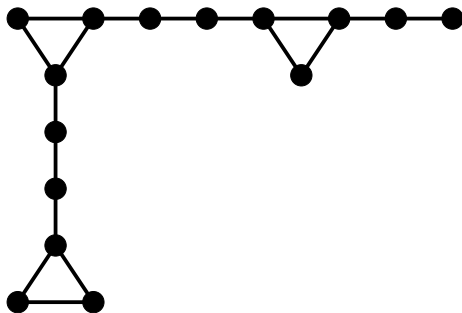
Graphes non-colorables

Les chaînes et cycles impairs ne sont pas les seuls graphes non-colorables.

Soit \mathcal{T} la famille suivante. Initialement, K_3 appartient à \mathcal{T} . Puis, prenons :

- un graphe de \mathcal{T} ayant un triangle dont l'un des sommets v est de degré 2 ;
- un graphe auxiliaire H étant soit une chaîne de longueur paire ou une chaîne de longueur impaire dont l'une des extrémités est collée à un triangle.

Le graphe obtenu en identifiant v et un sommet de degré 1 de H appartient alors à \mathcal{T} .



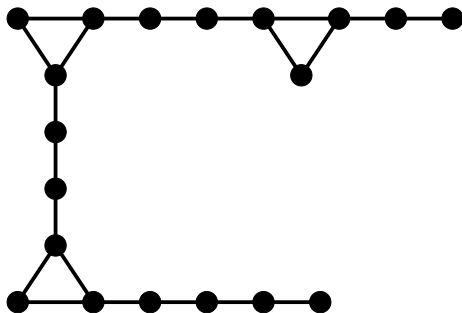
Graphes non-colorables

Les chaînes et cycles impairs ne sont pas les seuls graphes non-colorables.

Soit \mathcal{T} la famille suivante. Initialement, K_3 appartient à \mathcal{T} . Puis, prenons :

- un graphe de \mathcal{T} ayant un triangle dont l'un des sommets v est de degré 2 ;
- un graphe auxiliaire H étant soit une chaîne de longueur paire ou une chaîne de longueur impaire dont l'une des extrémités est collée à un triangle.

Le graphe obtenu en identifiant v et un sommet de degré 1 de H appartient alors à \mathcal{T} .



Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Les graphes non-colorables sont ceux de \mathcal{T} et les chaînes ou cycles impairs.

Idée de la preuve.

⇒) Induction sur le nombre d'arêtes du graphe.

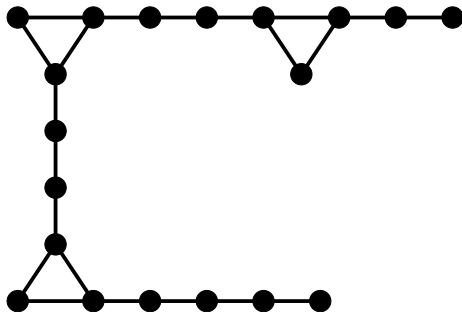
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Les graphes non-colorables sont ceux de \mathcal{T} et les chaînes ou cycles impairs.

Idée de la preuve.

⇒) Induction sur le nombre d'arêtes du graphe.

⇐) Argument du contreexemple d'ordre minimal.



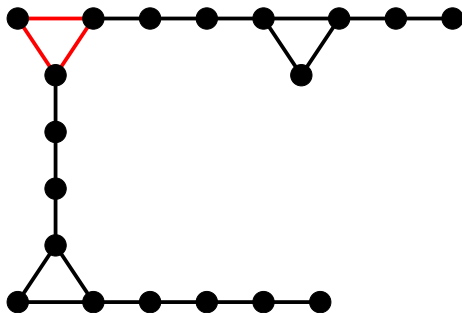
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Les graphes non-colorables sont ceux de \mathcal{T} et les chaînes ou cycles impairs.

Idée de la preuve.

⇒) Induction sur le nombre d'arêtes du graphe.

⇐) Argument du contreexemple d'ordre minimal.



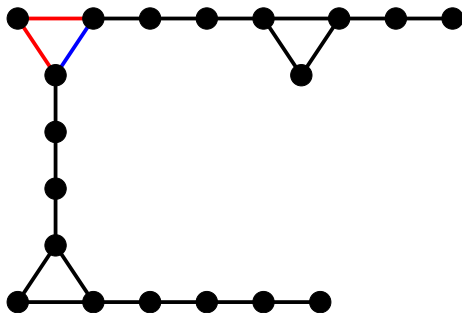
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Les graphes non-colorables sont ceux de \mathcal{T} et les chaînes ou cycles impairs.

Idée de la preuve.

⇒) Induction sur le nombre d'arêtes du graphe.

⇐) Argument du contreexemple d'ordre minimal.



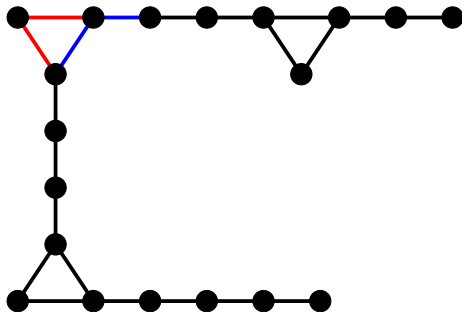
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Les graphes non-colorables sont ceux de \mathcal{T} et les chaînes ou cycles impairs.

Idée de la preuve.

⇒) Induction sur le nombre d'arêtes du graphe.

⇐) Argument du contreexemple d'ordre minimal.



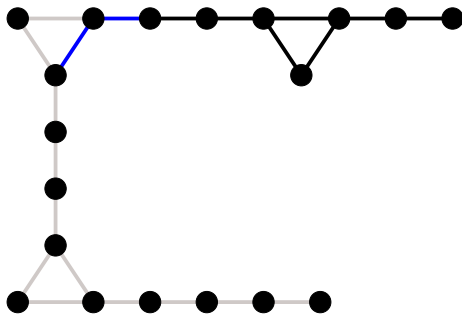
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Les graphes non-colorables sont ceux de \mathcal{T} et les chaînes ou cycles impairs.

Idée de la preuve.

\Rightarrow) Induction sur le nombre d'arêtes du graphe.

\Leftarrow) Argument du contreexemple d'ordre minimal.



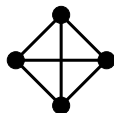
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout $n \geq 4$, on a $\chi'_{irr}(K_n) \leq 3$.

Preuve.

Tout graphe complet admet une 3-coloration localement irrégulière de ses arêtes sans paire de sommets $\{u, v\}$ telle que toutes les arêtes incidentes à u soient colorées 1 et toutes celles incidentes à v soient colorées 2.

Preuve par induction sur n . Dans toute coloration localement irrégulière des arêtes de K_4 , chacune des trois couleurs est utilisée pour colorer deux arêtes. Au rang supérieur, on considère une coloration d'un sous-graphe K_{k-1} obtenue par induction. Sans perte de généralité, aucun sommet de ce K_{k-1} n'a toutes ses arêtes incidentes colorées 1 dans cette coloration. On étend alors la coloration en colorant 1 les $k - 1$ arêtes restantes. ■



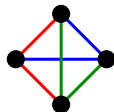
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout $n \geq 4$, on a $\chi'_{irr}(K_n) \leq 3$.

Preuve.

Tout graphe complet admet une 3-coloration localement irrégulière de ses arêtes sans paire de sommets $\{u, v\}$ telle que toutes les arêtes incidentes à u soient colorées 1 et toutes celles incidentes à v soient colorées 2.

Preuve par induction sur n . Dans toute coloration localement irrégulière des arêtes de K_4 , chacune des trois couleurs est utilisée pour colorer deux arêtes. Au rang supérieur, on considère une coloration d'un sous-graphe K_{k-1} obtenue par induction. Sans perte de généralité, aucun sommet de ce K_{k-1} n'a toutes ses arêtes incidentes colorées 1 dans cette coloration. On étend alors la coloration en colorant 1 les $k - 1$ arêtes restantes. ■



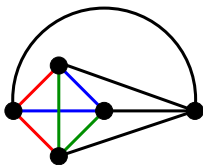
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout $n \geq 4$, on a $\chi'_{irr}(K_n) \leq 3$.

Preuve.

Tout graphe complet admet une 3-coloration localement irrégulière de ses arêtes sans paire de sommets $\{u, v\}$ telle que toutes les arêtes incidentes à u soient colorées 1 et toutes celles incidentes à v soient colorées 2.

Preuve par induction sur n . Dans toute coloration localement irrégulière des arêtes de K_4 , chacune des trois couleurs est utilisée pour colorer deux arêtes. Au rang supérieur, on considère une coloration d'un sous-graphe K_{k-1} obtenue par induction. Sans perte de généralité, aucun sommet de ce K_{k-1} n'a toutes ses arêtes incidentes colorées 1 dans cette coloration. On étend alors la coloration en colorant 1 les $k - 1$ arêtes restantes. ■



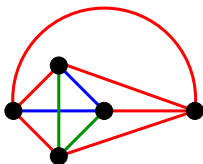
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout $n \geq 4$, on a $\chi'_{irr}(K_n) \leq 3$.

Preuve.

Tout graphe complet admet une 3-coloration localement irrégulière de ses arêtes sans paire de sommets $\{u, v\}$ telle que toutes les arêtes incidentes à u soient colorées 1 et toutes celles incidentes à v soient colorées 2.

Preuve par induction sur n . Dans toute coloration localement irrégulière des arêtes de K_4 , chacune des trois couleurs est utilisée pour colorer deux arêtes. Au rang supérieur, on considère une coloration d'un sous-graphe K_{k-1} obtenue par induction. Sans perte de généralité, aucun sommet de ce K_{k-1} n'a toutes ses arêtes incidentes colorées 1 dans cette coloration. On étend alors la coloration en colorant 1 les $k - 1$ arêtes restantes. ■



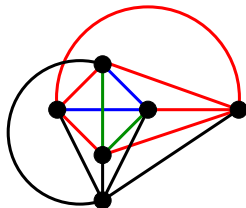
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout $n \geq 4$, on a $\chi'_{irr}(K_n) \leq 3$.

Preuve.

Tout graphe complet admet une 3-coloration localement irrégulière de ses arêtes sans paire de sommets $\{u, v\}$ telle que toutes les arêtes incidentes à u soient colorées 1 et toutes celles incidentes à v soient colorées 2.

Preuve par induction sur n . Dans toute coloration localement irrégulière des arêtes de K_4 , chacune des trois couleurs est utilisée pour colorer deux arêtes. Au rang supérieur, on considère une coloration d'un sous-graphe K_{k-1} obtenue par induction. Sans perte de généralité, aucun sommet de ce K_{k-1} n'a toutes ses arêtes incidentes colorées 1 dans cette coloration. On étend alors la coloration en colorant 1 les $k - 1$ arêtes restantes. ■



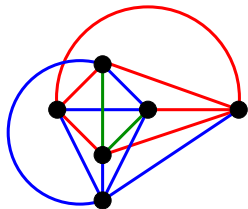
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Pour tout $n \geq 4$, on a $\chi'_{irr}(K_n) \leq 3$.

Preuve.

Tout graphe complet admet une 3-coloration localement irrégulière de ses arêtes sans paire de sommets $\{u, v\}$ telle que toutes les arêtes incidentes à u soient colorées 1 et toutes celles incidentes à v soient colorées 2.

Preuve par induction sur n . Dans toute coloration localement irrégulière des arêtes de K_4 , chacune des trois couleurs est utilisée pour colorer deux arêtes. Au rang supérieur, on considère une coloration d'un sous-graphe K_{k-1} obtenue par induction. Sans perte de généralité, aucun sommet de ce K_{k-1} n'a toutes ses arêtes incidentes colorées 1 dans cette coloration. On étend alors la coloration en colorant 1 les $k - 1$ arêtes restantes. ■



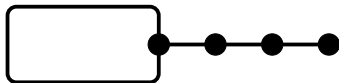
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si T est un arbre colorable, alors $\chi'_{irr}(T) \leq 3$.

Preuve.

Une *araignée* est un arbre obtenu en identifiant un sommet extrémité de chacune de $k \geq 2$ chaînes disjointes de longueur au plus 2.

Preuve par induction sur l'ordre n de T . Lorsque $n \leq 5$, l'arbre est une araignée. Au rang supérieur, on retire une sous-araignée de T . Si ce qui reste n'est pas colorable, c'est-à-dire une chaîne impaire, alors T a une structure simple. Dans le cas contraire, on colore par induction et on étend la coloration à l'araignée retirée. ■



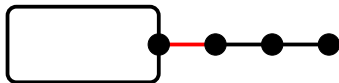
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si T est un arbre colorable, alors $\chi'_{irr}(T) \leq 3$.

Preuve.

Une *araignée* est un arbre obtenu en identifiant un sommet extrémité de chacune de $k \geq 2$ chaînes disjointes de longueur au plus 2.

Preuve par induction sur l'ordre n de T . Lorsque $n \leq 5$, l'arbre est une araignée. Au rang supérieur, on retire une sous-araignée de T . Si ce qui reste n'est pas colorable, c'est-à-dire une chaîne impaire, alors T a une structure simple. Dans le cas contraire, on colore par induction et on étend la coloration à l'araignée retirée. ■



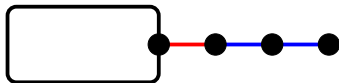
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si T est un arbre colorable, alors $\chi'_{irr}(T) \leq 3$.

Preuve.

Une *araignée* est un arbre obtenu en identifiant un sommet extrémité de chacune de $k \geq 2$ chaînes disjointes de longueur au plus 2.

Preuve par induction sur l'ordre n de T . Lorsque $n \leq 5$, l'arbre est une araignée. Au rang supérieur, on retire une sous-araignée de T . Si ce qui reste n'est pas colorable, c'est-à-dire une chaîne impaire, alors T a une structure simple. Dans le cas contraire, on colore par induction et on étend la coloration à l'araignée retirée. ■



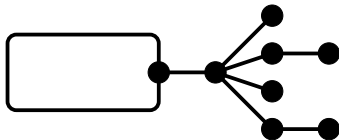
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si T est un arbre colorable, alors $\chi'_{\text{irr}}(T) \leq 3$.

Preuve.

Une *araignée* est un arbre obtenu en identifiant un sommet extrémité de chacune de $k \geq 2$ chaînes disjointes de longueur au plus 2.

Preuve par induction sur l'ordre n de T . Lorsque $n \leq 5$, l'arbre est une araignée. Au rang supérieur, on retire une sous-araignée de T . Si ce qui reste n'est pas colorable, c'est-à-dire une chaîne impaire, alors T a une structure simple. Dans le cas contraire, on colore par induction et on étend la coloration à l'araignée retirée. ■



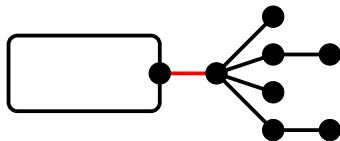
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si T est un arbre colorable, alors $\chi'_{\text{irr}}(T) \leq 3$.

Preuve.

Une *araignée* est un arbre obtenu en identifiant un sommet extrémité de chacune de $k \geq 2$ chaînes disjointes de longueur au plus 2.

Preuve par induction sur l'ordre n de T . Lorsque $n \leq 5$, l'arbre est une araignée. Au rang supérieur, on retire une sous-araignée de T . Si ce qui reste n'est pas colorable, c'est-à-dire une chaîne impaire, alors T a une structure simple. Dans le cas contraire, on colore par induction et on étend la coloration à l'araignée retirée. ■



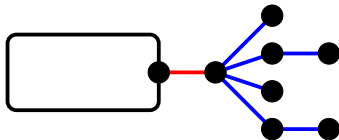
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si T est un arbre colorable, alors $\chi'_{\text{irr}}(T) \leq 3$.

Preuve.

Une *araignée* est un arbre obtenu en identifiant un sommet extrémité de chacune de $k \geq 2$ chaînes disjointes de longueur au plus 2.

Preuve par induction sur l'ordre n de T . Lorsque $n \leq 5$, l'arbre est une araignée. Au rang supérieur, on retire une sous-araignée de T . Si ce qui reste n'est pas colorable, c'est-à-dire une chaîne impaire, alors T a une structure simple. Dans le cas contraire, on colore par induction et on étend la coloration à l'araignée retirée. ■



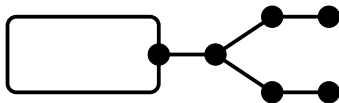
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si T est un arbre colorable, alors $\chi'_{\text{irr}}(T) \leq 3$.

Preuve.

Une *araignée* est un arbre obtenu en identifiant un sommet extrémité de chacune de $k \geq 2$ chaînes disjointes de longueur au plus 2.

Preuve par induction sur l'ordre n de T . Lorsque $n \leq 5$, l'arbre est une araignée. Au rang supérieur, on retire une sous-araignée de T . Si ce qui reste n'est pas colorable, c'est-à-dire une chaîne impaire, alors T a une structure simple. Dans le cas contraire, on colore par induction et on étend la coloration à l'araignée retirée. ■



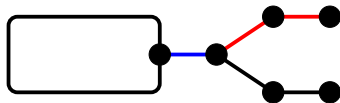
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si T est un arbre colorable, alors $\chi'_{\text{irr}}(T) \leq 3$.

Preuve.

Une *araignée* est un arbre obtenu en identifiant un sommet extrémité de chacune de $k \geq 2$ chaînes disjointes de longueur au plus 2.

Preuve par induction sur l'ordre n de T . Lorsque $n \leq 5$, l'arbre est une araignée. Au rang supérieur, on retire une sous-araignée de T . Si ce qui reste n'est pas colorable, c'est-à-dire une chaîne impaire, alors T a une structure simple. Dans le cas contraire, on colore par induction et on étend la coloration à l'araignée retirée. ■



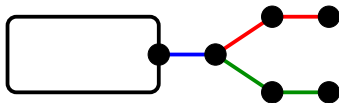
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si T est un arbre colorable, alors $\chi'_{\text{irr}}(T) \leq 3$.

Preuve.

Une *araignée* est un arbre obtenu en identifiant un sommet extrémité de chacune de $k \geq 2$ chaînes disjointes de longueur au plus 2.

Preuve par induction sur l'ordre n de T . Lorsque $n \leq 5$, l'arbre est une araignée. Au rang supérieur, on retire une sous-araignée de T . Si ce qui reste n'est pas colorable, c'est-à-dire une chaîne impaire, alors T a une structure simple. Dans le cas contraire, on colore par induction et on étend la coloration à l'araignée retirée. ■



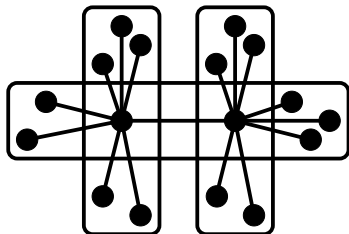
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si l'on a $\chi'_{irr}(G) = k$ et $\chi'_{irr}(H) = \ell$, alors $\chi'_{irr}(G \square H) \leq \max\{k, \ell\}$.

Preuve.

Soient ϕ_G (resp. ϕ_H) une k - (resp. ℓ -) coloration localement irrégulière des arêtes de G (resp. H). On définit $\phi : E(G \square H) \rightarrow \{1, \dots, \max\{k, \ell\}\}$ comme suit.

$$\phi((u_1, v_1)(u_2, v_2)) = \begin{cases} \phi_H(v_1 v_2) & \text{si } u_1 = u_2 \\ \phi_G(u_1 u_2) & \text{sinon} \end{cases}$$



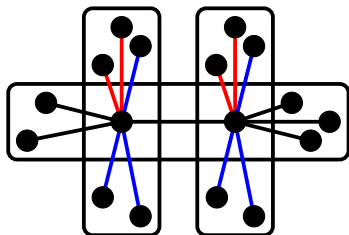
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si l'on a $\chi'_{irr}(G) = k$ et $\chi'_{irr}(H) = \ell$, alors $\chi'_{irr}(G \square H) \leq \max\{k, \ell\}$.

Preuve.

Soient ϕ_G (resp. ϕ_H) une k - (resp. ℓ -) coloration localement irrégulière des arêtes de G (resp. H). On définit $\phi : E(G \square H) \rightarrow \{1, \dots, \max\{k, \ell\}\}$ comme suit.

$$\phi((u_1, v_1)(u_2, v_2)) = \begin{cases} \phi_H(v_1 v_2) & \text{si } u_1 = u_2 \\ \phi_G(u_1 u_2) & \text{sinon} \end{cases}$$



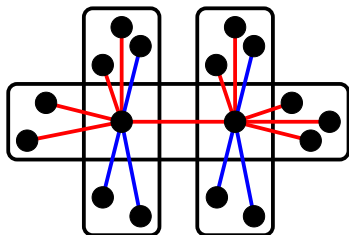
Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si l'on a $\chi'_{irr}(G) = k$ et $\chi'_{irr}(H) = \ell$, alors $\chi'_{irr}(G \square H) \leq \max\{k, \ell\}$.

Preuve.

Soient ϕ_G (resp. ϕ_H) une k - (resp. ℓ -) coloration localement irrégulière des arêtes de G (resp. H). On définit $\phi : E(G \square H) \rightarrow \{1, \dots, \max\{k, \ell\}\}$ comme suit.

$$\phi((u_1, v_1)(u_2, v_2)) = \begin{cases} \phi_H(v_1 v_2) & \text{si } u_1 = u_2 \\ \phi_G(u_1 u_2) & \text{sinon} \end{cases}$$



Notons que les graphes réguliers sont les moins irréguliers d'entre tous, et donc les moins susceptibles d'admettre une coloration localement irrégulière de leurs arêtes utilisant peu de couleurs. La plupart d'entre eux ne réfutent pourtant pas notre conjecture.

Thm. Baudon, B., Przybyło, Woźniak (2013)

Si G est un graphe d -régulier avec $d \geq 10^7$, alors $\chi'_{irr}(G) \leq 3$.

Idée de la preuve.

On attribue deux couleurs c_1 et c_2 à chaque sommet de G . Si cette bicoloration satisfait des conditions particulières, alors on peut extraire trois sous-graphes localement irréguliers de G . Puis on prouve qu'une telle bicoloration de G existe nécessairement avec probabilité non nulle grâce au lemme local de Lovász. ■



Partie 1 : Distinguer les sommets d'un graphe par une coloration

Partie 2 : Décomposer un graphe en sous-graphes localement irréguliers

Partie 3 : Résultat de complexité

Partie 4 : Conclusions et questions ouvertes

Soit le problème de décision suivant.

k -COLORATION D'ARÊTES LOCALEMENT IRRÉGULIÈRE - k -LIEC

Instance : Un graphe G .

Question : A-t-on $\chi'_{irr}(G) \leq k$?

Reconnaître un graphe localement irrégulier est facile. De ce fait, 1-LIEC est dans P.

Soit le problème de décision suivant.

k -COLORATION D'ARÊTES LOCALEMENT IRRÉGULIÈRE - k -LIEC

Instance : Un graphe G .

Question : A-t-on $\chi'_{irr}(G) \leq k$?

Reconnaître un graphe localement irrégulier est facile. De ce fait, 1-LIEC est dans P.

Étudier la complexité de k -LIEC pour $k \geq 3$ n'a d'intérêt que si la Conjecture d'Irrégularité Locale est fautive. En effet, si celle-ci était vérifiée, alors ces problèmes seraient équivalents à celui de déterminer si G est colorable. Or, ce problème est dans P puisque la structure des graphes non-colorables bénéficie d'une caractérisation simple.

Soit le problème de décision suivant.

k -COLORATION D'ARÊTES LOCALEMENT IRRÉGULIÈRE - k -LIEC

Instance : Un graphe G .

Question : A-t-on $\chi'_{irr}(G) \leq k$?

Reconnaître un graphe localement irrégulier est facile. De ce fait, 1-LIEC est dans P.

Étudier la complexité de k -LIEC pour $k \geq 3$ n'a d'intérêt que si la Conjecture d'Irrégularité Locale est fautive. En effet, si celle-ci était vérifiée, alors ces problèmes seraient équivalents à celui de déterminer si G est colorable. Or, ce problème est dans P puisque la structure des graphes non-colorables bénéficie d'une caractérisation simple.

En revanche, 2-LIEC n'est pas affecté par la véracité de notre conjecture.

Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

À noter que des résultats similaires ont été prouvés dans le cadre des colorations d'arêtes somme-distinguante et détectable.

Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

Preuve.

Étant donné une 2-coloration ϕ des arêtes de G , on peut facilement vérifier que chaque couleur de ϕ induit un sous-graphe de G localement irrégulier. 2-LIEC est donc dans NP.

Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

Preuve.

Étant donné une 2-coloration ϕ des arêtes de G , on peut facilement vérifier que chaque couleur de ϕ induit un sous-graphe de G localement irrégulier. 2-LIEC est donc dans NP.

On montre désormais que 2-LIEC est NP-difficile par réduction depuis 1-DANS-3 SAT.

1-DANS-3 SAT

Instance : Une formule 3CNF F de clauses C_1, \dots, C_m et variables x_1, \dots, x_n .

Question : F est-elle *1-dans-3 satisfiable* ?

De F , on construit un graphe G_F tel que

$$F \text{ est 1-dans-3 satisfiable} \Leftrightarrow \chi'_{irr}(G_F) = 2.$$

Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

G_F doit être vu comme un *circuit électrique* à travers lequel deux *courants*, *positif* et *négatif*, transitent de la même manière qu'une 2-coloration localement irrégulière d'arêtes se propage dans un graphe. Ce circuit est fait de *gadgets* (ou *composants*) connectés grâce à leurs *entrées* et leurs *sorties*. L'agencement des gadgets de G_F s'apparente à la structure de F et la propagation des courants à travers ceux-ci est représentative des conséquences de mettre tel à tel littéral de F vrai ou faux.

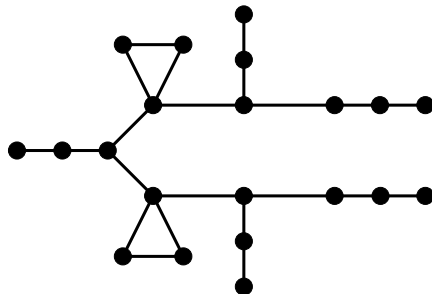
Les gadgets de G_F sont les suivants.

- Un *gadget générateur* $G_F(S)$.
- m *gadgets de clause* $G_F(C_1), \dots, G_F(C_m)$.
- $2n$ *gadgets de littéral* $G_F(\ell_1), \dots, G_F(\ell_{2n})$.

Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

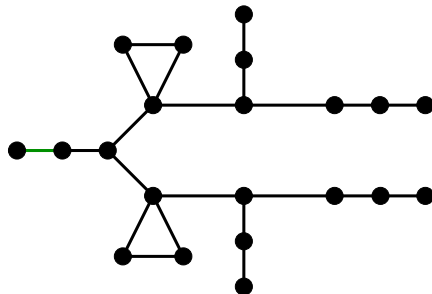
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

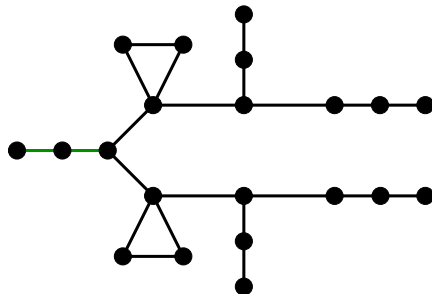
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

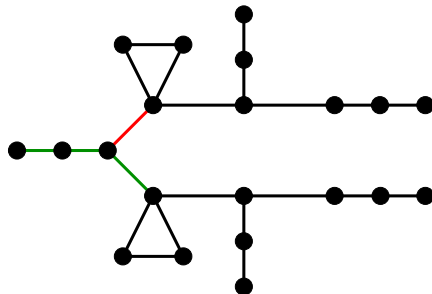
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

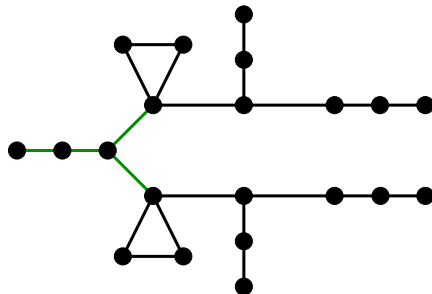
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

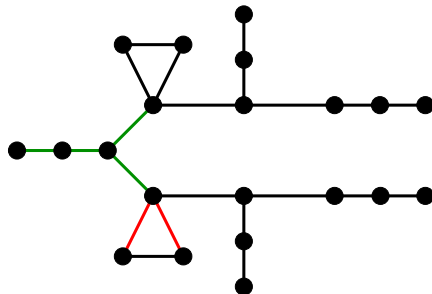
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

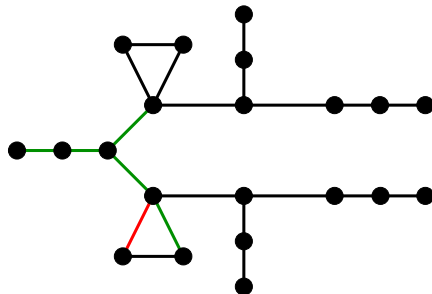
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

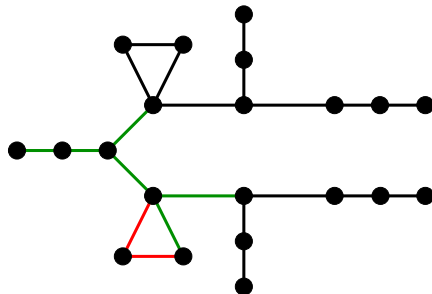
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

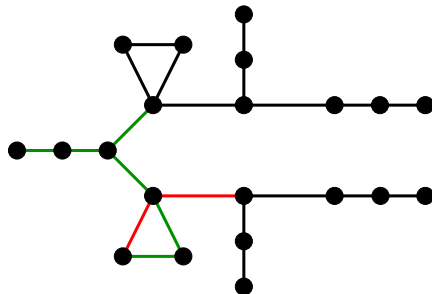
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

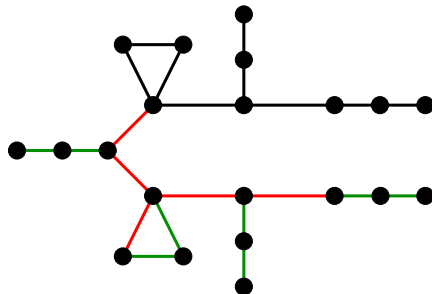
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

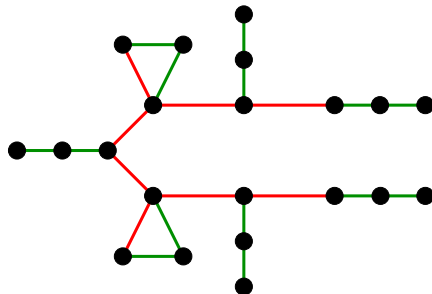
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

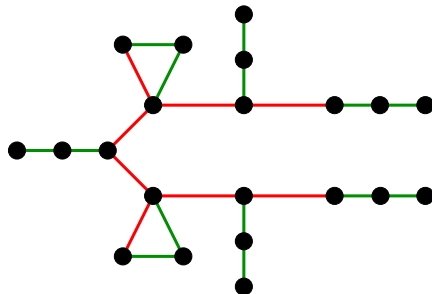
Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

Le gadget suivant duplique le courant d'entrée.

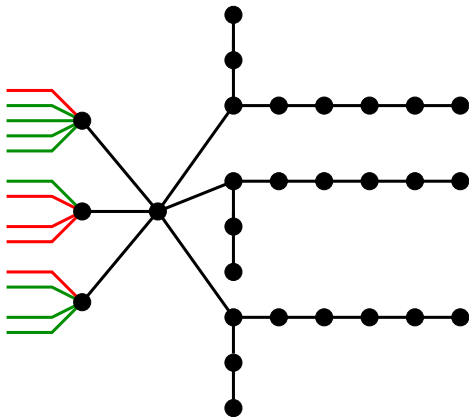


En greffant ce gadget plusieurs fois d'affilée, on peut propager le courant d'entrée dans un nombre arbitraire de directions. On peut également inverser le courant de sortie en augmentant la longueur des sorties (i.e. en y collant un P_5).

Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

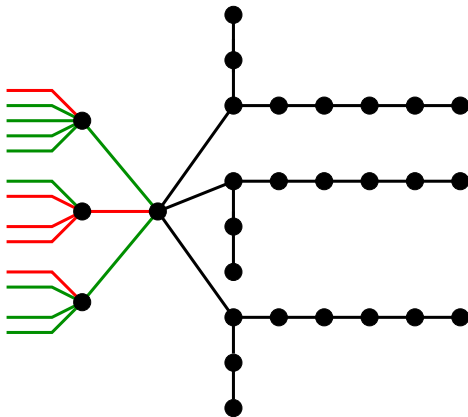
Le gadget $G_F(C_i)$ propage le courant positif vers $G_F(\ell_{i_1})$, $G_F(\ell_{i_2})$ et $G_F(\ell_{i_3})$ lorsque $C_i = (\ell_{i_1} \vee \ell_{i_2} \vee \ell_{i_3})$. Deux sorties sont négatives, la dernière est positive.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

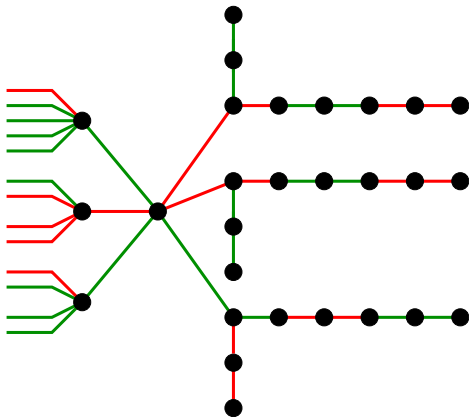
Le gadget $G_F(C_i)$ propage le courant positif vers $G_F(\ell_{i_1})$, $G_F(\ell_{i_2})$ et $G_F(\ell_{i_3})$ lorsque $C_i = (\ell_{i_1} \vee \ell_{i_2} \vee \ell_{i_3})$. Deux sorties sont négatives, la dernière est positive.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

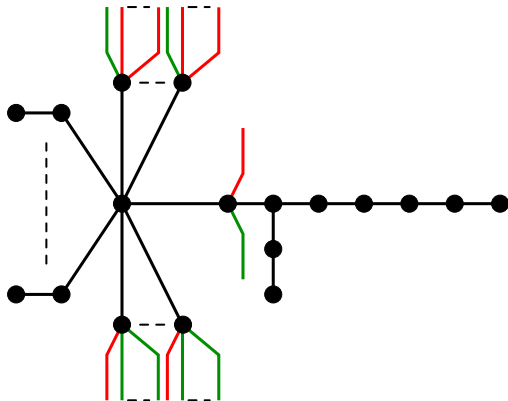
Le gadget $G_F(C_i)$ propage le courant positif vers $G_F(\ell_{i_1})$, $G_F(\ell_{i_2})$ et $G_F(\ell_{i_3})$ lorsque $C_i = (\ell_{i_1} \vee \ell_{i_2} \vee \ell_{i_3})$. Deux sorties sont négatives, la dernière est positive.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

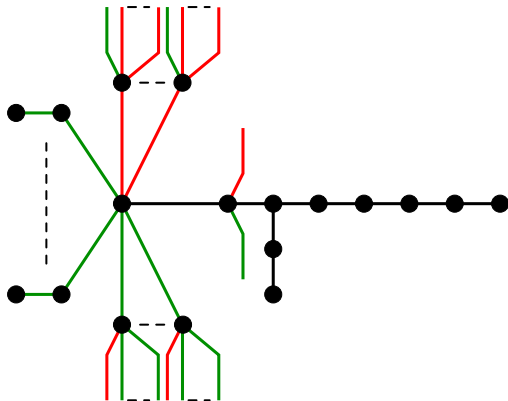
Le gadget $G_F(\ell_i)$ propage le courant ssi toutes ses entrées reçoivent le même courant. Sa sortie propage alors le même courant et est connectée à celle de $G_F(\bar{\ell}_i)$.



Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

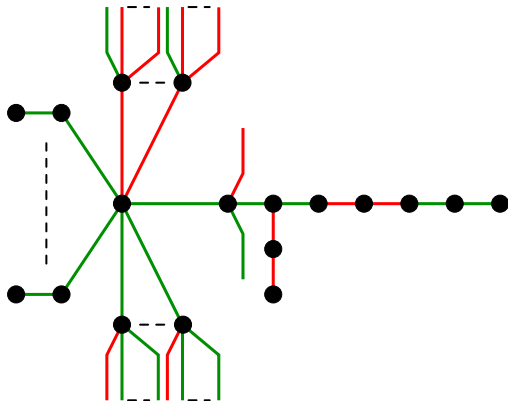
Le gadget $G_F(\ell_i)$ propage le courant ssi toutes ses entrées reçoivent le même courant. Sa sortie propage alors le même courant et est connectée à celle de $G_F(\bar{\ell}_i)$.



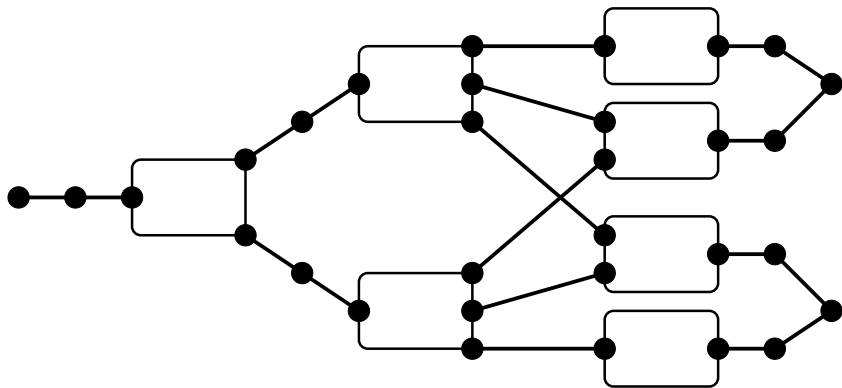
Thm. B. (2013)

2-LIEC est NP-complet.

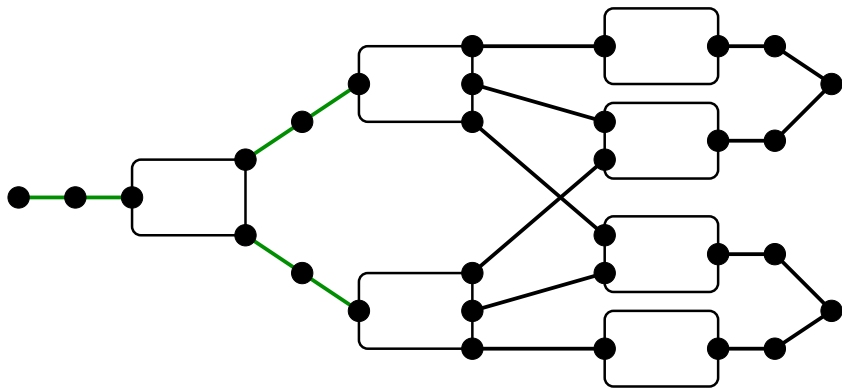
Le gadget $G_F(\ell_i)$ propage le courant ssi toutes ses entrées reçoivent le même courant. Sa sortie propage alors le même courant et est connectée à celle de $G_F(\bar{\ell}_i)$.



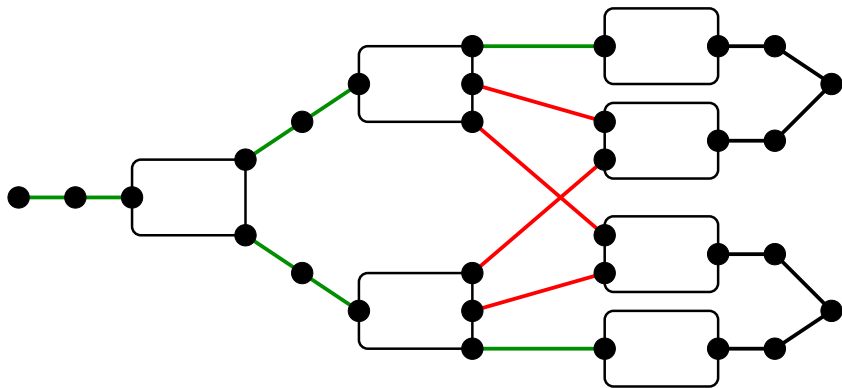
Grphe réduit obtenu pour $F = (x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2)$



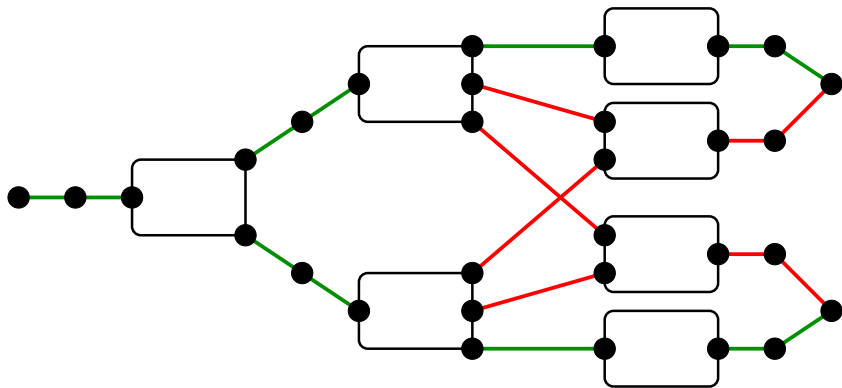
Grphe réduit obtenu pour $F = (x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2)$



Grphe réduit obtenu pour $F = (x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2)$



Grphe réduit obtenu pour $F = (x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2)$





Partie 1 : Distinguer les sommets d'un graphe par une coloration

Partie 2 : Décomposer un graphe en sous-graphes localement irréguliers

Partie 3 : Résultat de complexité

Partie 4 : Conclusions et questions ouvertes

On a montré que la Conjecture d'Irrégularité Locale est vérifiée pour quelques familles de graphes. Mais on ne dispose pas encore de résultats généraux s'approchant de cette conjecture.

Qst. Peut-on trouver une constante $c \geq 3$ telle que tout graphe colorable est d'index chromatique irrégulier au plus c ?

On a montré que la Conjecture d'Irrégularité Locale est vérifiée pour quelques familles de graphes. Mais on ne dispose pas encore de résultats généraux s'approchant de cette conjecture.

■ Qst. Peut-on trouver une constante $c \geq 3$ telle que tout graphe colorable est d'index chromatique irrégulier au plus c ?

Le problème des graphes bipartis est que beaucoup d'entre eux ne sont pas colorables.

■ Qst. La Conjecture d'Irrégularité Locale est-elle vérifiée pour les graphes bipartis ?

On a montré que la Conjecture d'Irrégularité Locale est vérifiée pour quelques familles de graphes. Mais on ne dispose pas encore de résultats généraux s'approchant de cette conjecture.

Qst. Peut-on trouver une constante $c \geq 3$ telle que tout graphe colorable est d'index chromatique irrégulier au plus c ?

Le problème des graphes bipartis est que beaucoup d'entre eux ne sont pas colorables.

Qst. La Conjecture d'Irrégularité Locale est-elle vérifiée pour les graphes bipartis ?

Dans notre preuve que 2-LIEC est NP-complet, les graphes réduits n'ont pas de caractéristiques particulières. Ils ne sont notamment pas bipartis.

Qst. 2-LIEC est-il NP-complet lorsque restreint aux graphes bipartis ?

Merci pour votre attention