

## Devoir surveillé n°1 (3 exercices) durée 1h30 – sans documents

---

### Exercice 1. Questions de cours.

- 1.1 Qu'est-ce qu'un graphe non orienté connexe ?
- 1.2 Qu'est-ce qu'un cycle dans un graphe non orienté ? un cycle eulérien ?
- 1.3 Qu'est-ce qu'un graphe régulier ?
- 1.4 Qu'est-ce qu'un arbre ?
- 1.5 Qu'est-ce qu'une clique dans un graphe non orienté ?
- 1.6 Qu'est-ce que la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non) ?

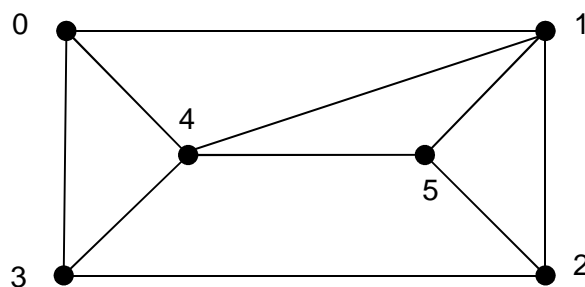
---

### Exercice 2. Complémentaire d'un graphe.

Le complémentaire d'un graphe non orienté  $G$  à  $n$  sommets est le graphe non orienté  $\text{Compl}(G)$  à  $n$  sommets défini par :

*$uv$  est une arête de  $\text{Compl}(G)$  si et seulement si  $uv$  n'est pas une arête de  $G$*

- 2.1 Dessinez le complémentaire du graphe ci-dessous. Quelle(s) propriété(s) possède le graphe obtenu ?

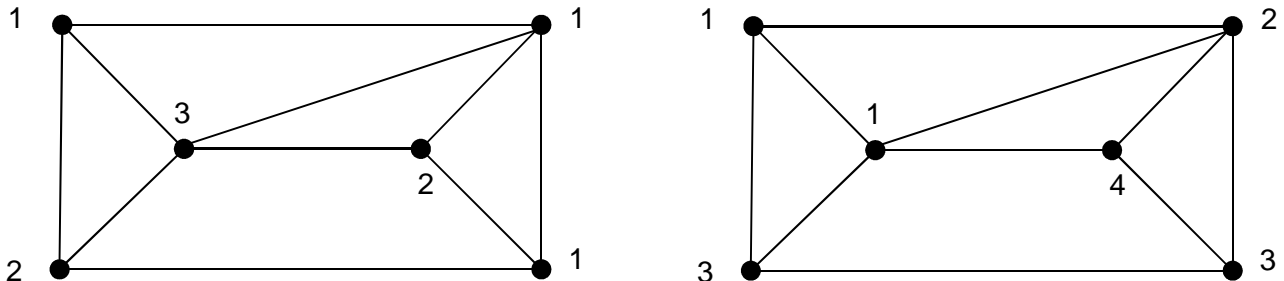


- 2.2 Écrire une action qui, à partir d'un graphe non orienté  $G$  à  $n$  sommets, construit le graphe  $H$  tel que  $H = \text{compl}(G)$ .
- 2.3 Écrire une fonction qui, à partir de deux graphes non orientés  $G$  et  $H$  à  $n$  sommets, détermine si  $H = \text{Compl}(G)$ .

### Exercice 3. Colorations mystérieuses.

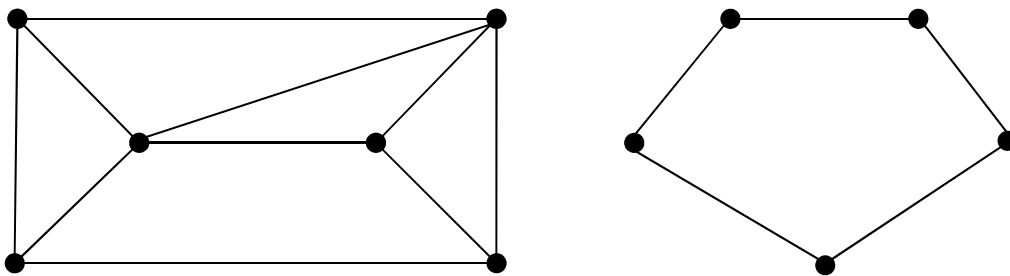
Soit  $G$  un graphe non orienté à  $n$  sommets. Une  $k$ -coloration mystérieuse de  $G$  est une application associant un entier pris dans l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$  à chaque sommet de  $G$  de façon telle que tout sommet ait au plus un voisin ayant la même couleur que lui. Le nombre chromatique mystérieux de  $G$  est alors le plus petit nombre  $k$  de couleurs nécessaire pour produire une  $k$ -coloration mystérieuse de  $G$ .

Considérons les deux colorations suivantes (les entiers sont les couleurs et non les numéros des sommets) :



La coloration de gauche n'est pas une coloration mystérieuse, car le sommet « en haut à droite » possède deux voisins ayant la même couleur que lui. La coloration de droite est bien une coloration mystérieuse car tout sommets a au plus un voisin ayant la même couleur que lui.

3.1 Proposez une coloration mystérieuse optimale (c'est-à-dire utilisant le moins de couleurs possible) pour chacun des deux graphes suivants :



- 3.2 Quel est le nombre chromatique mystérieux d'un graphe complet à  $n$  sommets ? Prouvez-le (ou, au moins, expliquez pourquoi...).
- 3.3 Quel est le nombre chromatique mystérieux d'un cycle à  $n$  sommets ? Prouvez-le (ou, au moins, expliquez pourquoi...).

On peut représenter une coloration d'un graphe par un tableau d'entiers, associant à chaque sommet sa couleur (on pourra ainsi définir un type TColoration).

3.4 Écrire une fonction qui, à partir d'un graphe non orienté  $G$  à  $n$  sommets et d'une coloration  $C$ , détermine si  $C$  est une coloration mystérieuse de  $G$ .

L'algorithme First-Fit peut être utilisé pour produire une coloration mystérieuse d'un graphe :

- On traite les sommets dans l'ordre 0, 1, etc.
  - Traiter un sommet consiste à lui attribuer la plus petite couleur possible (respectant la contrainte donnée dans la définition des colorations mystérieuses...).
- 3.5 Expliquez en une ou deux phrases les modifications à apporter à la version de l'algorithme First-Fit vue en TD.
- 3.6 Écrire une action ou une fonction qui, à partir d'un graphe non orienté  $G$  à  $n$  sommets, construit la coloration mystérieuse de  $G$  produite par l'algorithme First-Fit.