COATI

Julien Bensmail et Nicolas Nisse
Tél : +33 (0)4 97 15 53 28
E-mail : nicolas.nisse@inria.fr

Sophia Antipolis, le 18 décembre 2018

Objet : *sujet de stage : Localisation d'une cible invisible cachée dans un graphe*

Contexte.
Un *ensemble résolvant* d'un graphe G est un ensemble de sommets S permettant de distinguer tous les sommets de G via leur distance aux sommets de S. La *dimension métrique* de G est la taille de ses plus petits ensembles résolvants. Depuis l'introduction de ces notions par Slater [3] et Harary et Melter [2] dans les années 70, le problème de déterminer la dimension métrique d'un graphe a reçu beaucoup d'attention, du fait, notamment, de ses nombreuses applications. Ce problème est généralement NP-complet, mais, selon la famille de graphe considérée, il devient parfois appréhendable.

Une manière équivalente de visualiser ce problème est d'imaginer le jeu de localisation suivant. Supposons qu'une cible invisible et immobile soit cachée en un sommet de G, et que les sommets de ce dernier représentent des détecteurs qui, lorsque interrogés, nous indiquent leur distance à la cible. Quel est alors le plus petit ensemble de sommets à interroger de manière à pouvoir identifier, depuis la liste des distances résultantes, la position exacte de la cible, quelle qu'elle soit ?

Dans un travail récent [1], nous avons considéré une version "séquentielle" de la dimension métrique, où nous ne pouvons interroger qu'un nombre limité k de sommets, mais nous avons le droit à plusieurs tours d'interrogation ℓ. La question principale est alors : pour k, ℓ donnés, peut-on localiser une cible en moins de ℓ tours, sous l'hypothèse que seuls k sommets peuvent être interrogés à chaque tour ? Si l'on peut à première vue penser que ce problème doit être proche du problème initial, nos résultats montrent que, en général, ce n'est pas le cas.

À l'heure actuelle, nous avons principalement étudié le cas des arbres, pour lequel nous avons montré que jouer optimalement le premier tour d'interrogation est NP-complet, mais que le problème devient facile à partir du deuxième tour. L'objectif principal du stage sera d'étudier le problème pour d'autres classes de graphes *a priori* faciles, comme les graphes d'intervalles ou dégénérés (dont les planaires), en vue d'une meilleure compréhension générale. On pourra également tenter de généraliser nos résultats sur les arbres aux graphes de largeur arborescente bornée. Enfin, on pourra également s'intéresser à la version *relative* de la dimension métrique, dans laquelle la cible doit être repérée grâce à sa *distance relative* aux sommets interrogés. Tout reste à faire pour cette dernière ; de fait, même le cas des chemins ne semble pas être facile à comprendre.

Prérequis.
Connaissances de base de théorie des graphes, et solides compétences mathématiques (en particulier : comprendre et écrire des preuves). Des connaissances en algorithmique et programmation (par exemple Python) seront un plus.

Bibliographie.
[1] J. Bensmail, F. Mc Inerney, D. Mazauric, N. Nisse, S. Pérennes. Sequential Metric Dimension. In 16th Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA). Lecture Notes in Computer Science, vol. 11312. Springer. Helsinki, Finland, 2018.

[2] F. Harary, R. A. Melter. On the metric dimension of a graph. Ars Combinatoria, 2 :191–195, 1976.

[3] P. J. Slater. Leaves of trees. pages 549–559. Congressus Numerantium, No. XIV, 1975.