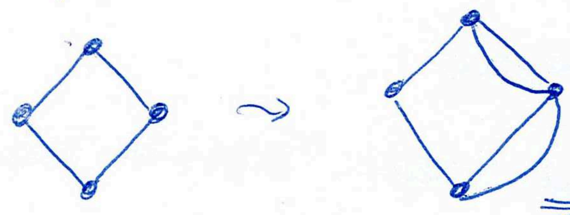
Sur la "quête" vers une version dirigée de la 1-2-3 Conjecture :

(1)

Motivations : Faire apparaître une coloration propre "naturelle" dans le graphe (Chartrand et al.).

Par "naturelle", on entend déjà présente de par la structure. Ex :



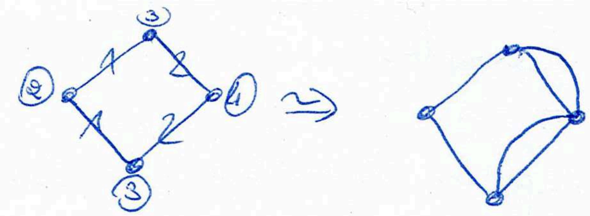
ici, encodée par les degrés

$\Rightarrow$ graphe localement irrégulier

"Minimisation" des "resonances"
$\approx$ minimiser la multiplication max des arêtes.

Revient à un problème de pondération d'arêtes. Veut, en minimisant le poids max, des sommes incidentes aux sommets formant une coloration propre.

Pour le G_1 :



sommes $\Rightarrow$ degrés.

Pondération distinguante = cette propriété

Qst. Quels graphes sont pondérables de cette manière ?

$\Rightarrow$ Que ceux qui n'ont pas K_2 comme composante connexe (peut être vu par "induction").

Graphe sympa = pas K_2 comme composante

1-2-3 Conjecture : Karoński, Łuszak, Thomason 2004

Pour tout graphe sympa G, on a $\chi_{\Sigma}^{e}(G) \leq 3$.

où $\chi_{\Sigma}^{e}(G)$ est min k tq $\exists$ k-pondération distinguante.

Qqs Exemples : (2)

- Graphes complets (« induction »).
- Graphes bipartis (1,2 si taille paire, 1,2,3 sinon)

Quelques faits :

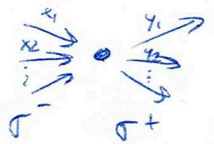
- on a parfois besoin de 1,2,3 (K_n) même pour les graphes bipartis (C_6)
- en fait NPC de savoir si $\chi_\Sigma \leq 2$.
  ↳ par contre polynomial pour les graphes bipartis (multicactus impairs ou bizarres)
- en général on sait faire 1,2,3,4,5 via un très joli algorithme.
- plein de versions :
  → multisets (1,2,3 prouvé)
  → totale (1,2,3 prouvé)
  → produit (1,2,3,4 prouvé).
  → listes (pas de borne constante).

Généraliser aux graphes dirigés :

Voudrait une déf sympa, et naturel en théorie des graphes d'aller des graphes non-orientés aux dirigés.

Voudrait si possible les mêmes comport^t :
→ pas d'induction.
→ mêmes effets lorsque l'on pondère un arc
→ mauvais graphes ...

Plusieurs options car deux « sommes » pour chaque sommet :



Bien sûr demander que $\sigma^-(u)+\sigma^+(u) \neq \sigma^-(v)+\sigma^+(v)$ serait juste la 1-2-3 conjecture.

Premiers travaux : Borowiecki, Grytczuk, Pilśniak 2012 « sommes relatives »

$|\sigma^- - \sigma^+| \neq |\sigma^- - \sigma^+|$

1,2 marche, aussi en listes. Khatirinejad, Naserasr, Newman, Seamone, Stevens 2011

Ici, se concentre sur l'un de $\sigma^-(u), \sigma^+(u)$ devant différer de l'un de $\sigma^-(v), \sigma^+(v)$

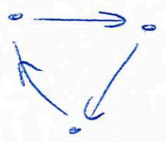
→ Quatre variantes

A $(+,+)$ $\quad u \longrightarrow v \quad : \sigma^+(u) \neq \sigma^+(v)$

avec Baudon, Sopena 2015.

→ tous les graphes peuvent être pondérés

→ parfois besoin de 1, 2, 3 :



→ 1, 2, 3 marche pour tout graphe !

⇒ Juste induction

→ Decide si 1, 2 : NPC.

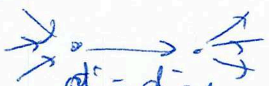
B $(-,-)$ $\quad u \longrightarrow v \quad : \sigma^-(u) \neq \sigma^-(v)$

PAREIL, EN INVERSANT LES ARCS ⇒ $(+,+)$.

C $(+,-)$ $\quad u \longrightarrow v \quad : \sigma^+(u) \neq \sigma^-(v)$

→ mécanisme de pondération proche de la 1-2-3 Conjecture.

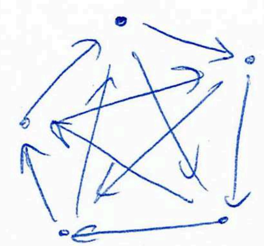
→ ts les ~~arcs~~ graphes ne peuvent être pondérés : arcs solitaires :



$d^+ = d^- = 1$

mais sinon, graphe sympa.

→ parfois besoin de 1, 2, 3 :



: essaye avec 1, 2 ⇒ déductions successives.

⇒ 1, 2, 3 marche !

. graphe biparti $B(D)$ associé à D.

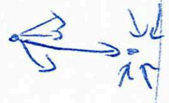
. explose chaque sommet v de D en sa partie sortante et entrante.

⇝ équivalence avec 1, 2, 3 ds les bipartis, qui est vrai.

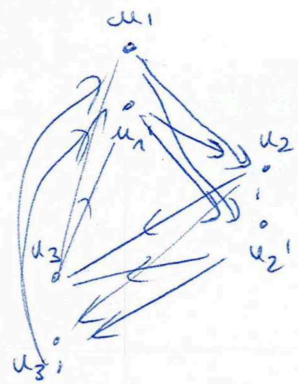
→ Du coup, savoir si 1, 2 est polynomial, car savoir si $\chi_\Sigma(G) \leq 2$ pour un biparti se fait en polynomial

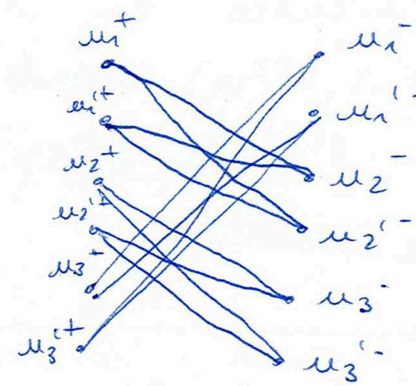
(1+). $u \longrightarrow v$: $\sigma^-(u) + \sigma^+(v)$ (4)

→ pas du tout le même mécanisme de pondération.

→ ts les graphes avec $\underline{\text{ss arc}}$: ne marchent pas. 

→ tjrs pas borné si pas ça. À cause des arcs solitaires.





Mais on veut $\sigma^-(u_1) \neq \sigma^+(u_2)$

alors que u_1^- et u_2^+ pas liés dans $B(D)$

<u>Sympa</u> : pas de ss-arc ou arc solitaire

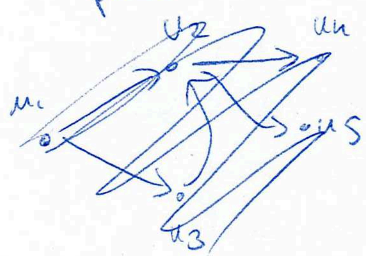
→ parfois besoin de 1, 2, 3 (...)

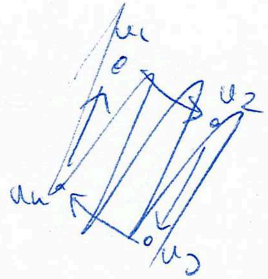
→ Horňák, Przybyło, Woźniak : (4).

<u>Idée de la preuve</u> :

- utilise $B(D)$ encore

⚠ représente les sommes obtenues par les contraintes !





<u>idée</u> : pondérer ~~la partie~~ de sorte que les sommes de la partie + soient disjointes de celles de la partie −.

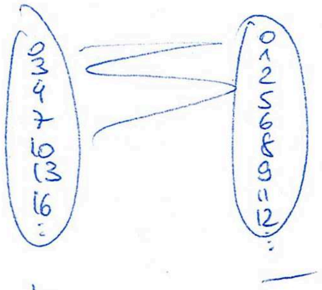
En gros 1, 2, 3, 4 et 1, 3 dans + et 2, 0 dans −.

Donc un résultat particulier sur les bipartis.

Semblait dur sur 1, 2, 3 sans bonnes hypothèses...

Preuve de 1, 2, 3 :

Vise :

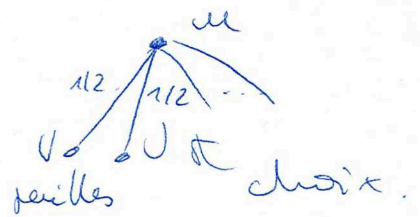


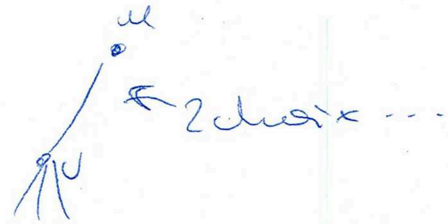
\+

- Pour faire ça, Reverse BFS.
- On gère jusqu'à la racine.

-> Ajustements via chemins sur lesquels on a du choix.

Par ex :





⑤

Aussi Σ2 est NPC pour graphes sympas.

Si pas sympas (juste solutions) : equivalent à k-coloring...