

## TD n° 9 : Mots et langages, langages rationnels

---

### Exercice 1. Mots sur un alphabet, langages.

On considère l'alphabet  $A = \{a, b\}$ .

- Étant donnés les mots  $u = aa$  et  $v = bab$ , écrire les mots  $uv$ ,  $(uv)^2$  et  $u^3v$ .
- Définissez en extension le langage  $L = A^3$  (mots de longueur 3 définis sur l'alphabet  $A$ ).
- On considère les trois langages suivants :
  - $L_1 = \{u.v / u \in A^+, v \in A^+\}$  ( $A^+$  : mots de longueur au moins 1 construits sur l'alphabet  $A$ )
  - $L_2 = \{u.v / u \in A^+, v \in A^*\}$
  - $L_3 = \{u.v / u \in A^*, v \in A^*\}$

À quoi correspondent ces langages ?

---

### Exercice 2. Propriété de la concaténation.

Démontrez la propriété suivante :

Si  $u, v$  et  $w$  sont trois mots de  $A^*$ , alors  $uw = vw \Leftrightarrow wu = wv \Leftrightarrow u = v$

*On pourra écrire les mots  $u, v$  et  $w$  sous la forme  $u = u_1 \dots u_p, v = v_1 \dots v_q$  et  $w = w_1 \dots w_r$ .*

---

### Exercice 3. Lemme de Levi.

Démontrez le lemme de Levi :

Si  $u$  et  $v$  sont tous deux préfixes de  $w$ , alors  $u$  est préfixe de  $v$ , ou  $v$  est préfixe de  $u$ . *On pourra considérer deux cas, (1)  $|u| \geq |v|$  et (2)  $|u| < |v|$ .*

---

### Exercice 4. Opérations sur les langages.

Les égalités suivantes sont-elles vérifiées pour tous langages  $L_1, L_2$  et  $L_3$  ?  $L_1.(L_2 \cup L_3) = L_1.L_2 \cup L_1.L_3$

- $L_1.(L_2 \cap L_3) = L_1.L_2 \cap L_1.L_3$
- $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$
- $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$

*Si la réponse est positive, une démonstration est nécessaire. Pour démontrer que deux ensembles  $A$  et  $B$  sont égaux, on doit démontrer deux propriétés :  $x \in A \Rightarrow x \in B$ , et  $x \in B \Rightarrow x \in A$ . Par contre, si la réponse est négative, un contre-exemple suffit...*

---

### Exercice 5. Relation « être préfixe de »

Montrez que la relation « être préfixe de » est une relation d'ordre partiel sur  $A^*$ , c'est-à-dire qu'elle est transitive, antisymétrique et réflexive.

---

### Exercice 6. Mots et langages rationnels

Soit l'alphabet  $A = \{a, b\}$  ; on considère les langages rationnels définis par des expressions rationnelles de la façon suivante :  $L_1 = b^*a$ ,  $L_2 = a^+b^+$  et  $L_3 = a^*b^+(a + b)$ .

- Les mots suivants appartiennent-ils à ces langages : a, b, aba, abb, ba, baa, abab, abba ?
- Donnez une expression rationnelle pour les langages  $L_1 \cap L_2$ ,  $L_1 \cap L_3$ ,  $L_2 \cap L_3$ .
- Quelle forme ont les mots des langages  $L_1^*$  ?  $L_2^*$  ?

---

### Exercice 7. Langages rationnels

Sur l'alphabet  $A = \{0, 1\}$ , donnez des expressions rationnelles décrivant les langages suivants (basés sur la représentation binaire des nombres) :

- les nombres pairs,
- les multiples de 8,
- les nombres congrus à 3 modulo 16,
- les mots contenant la séquence 011 (consécutifs),
- les mots sans 0, les mots sans 01, puis les mots sans 011,
- les mots ayant un nombre pair de 1,
- les mots ayant un nombre impair de 0,
- les mots ayant un nombre pair de 1 et impair de 0.