

TD n° 1 : Exercices de modélisation

Pour chacun des exercices suivants, il est demandé d'essayer de modéliser les données du problème sous forme d'un « dessin », de sorte que la solution du problème puisse « se lire » directement sur le dessin.

Exercice 1. Le tonneau.

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, on dispose de deux jarres non graduées, l'une de 5 litres, l'autre de 3 litres. Les opérations possibles sont les suivantes : (1) remplir complètement une jarre en puisant dans le tonneau ou (2) vider le contenu d'une jarre dans l'autre (sans débordement).

Comment doit-on procéder pour prélever ces 4 litres ?

Exercice 2. Le passeur, le loup, la chèvre et le chou.

Un passeur doit faire traverser une rivière à l'aide de sa barque à un loup, une chèvre et un chou. Il ne peut transporter qu'au plus 1 élément à la fois. Sachant que se trouvant seuls, la chèvre mange le chou et le loup mange la chèvre, comment le passeur doit-il s'y prendre ?

Exercice 3. Le jeu de Fan-Tan

On considère le jeu d'allumettes à deux joueurs suivant : on dispose de 2 tas d'allumettes (par exemple 2 tas composés chacun de 3 allumettes) et, à tour de rôle, chaque joueur peut enlever une ou deux allumettes dans l'un des deux tas. Le joueur qui retire la dernière allumette a perdu.

Existe-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur ? Si oui, laquelle ?

Exercice 4. Le jeu des bâtonnets de Fort-Boyard (version 1)

On dispose d'une rangée de 20 bâtonnets. À tour de rôle, chaque joueur doit retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets consécutifs à l'extrémité de la rangée. Le joueur qui se retrouve avec le dernier bâtonnet perd la partie.

Préférez-vous jouer en premier ou en second ? Pourquoi ?

Et dans le cas où le joueur qui prend le dernier bâtonnet est déclaré gagnant ?

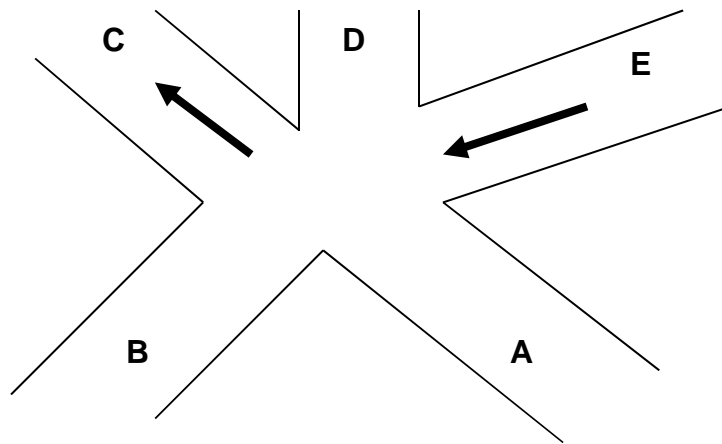
Exercice 5. Le jeu des bâtonnets de Fort-Boyard (version 2)

On dispose d'une rangée de 20 bâtonnets. À tour de rôle, chaque joueur doit retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets consécutifs à l'endroit de son choix. Le joueur qui se retrouve avec le dernier bâtonnet perd la partie.

Préférez-vous jouer en premier ou en second ? Pourquoi ?

Exercice 6. Un problème de carrefour.

On considère l'intersection représentée par le schéma suivant (une flèche indique une voie à sens unique).



On peut vérifier qu'il y a 13 façons différentes de traverser ce carrefour (les demi-tours sont naturellement interdits !...) : AB, AC, EC, EA, etc.

On souhaite mettre en place des feux de signalisation pour ce carrefour. On suppose qu'à chaque traversée possible est associée un feu. Ainsi, venant de A, nous avons trois possibilités : aller en B, en C ou en D. Il y aura donc trois voies sur A menant au carrefour, chacune avec son feu indépendant.

On veut assurer que lorsqu'un feu est vert (pour une traversée donnée) toutes les traversées « en conflit de croisement » sont au rouge (deux traversées sont en conflit si les véhicules les empruntant sont amenés à se croiser). Une solution très simple consiste à faire passer au vert successivement et une à une chacune des traversées ; on obtient alors un « cycle de feux » de longueur 13 (lorsqu'un feu passe au rouge, il faut attendre 12 changements pour avoir le vert à nouveau). Ce n'est naturellement pas satisfaisant et l'on aimerait trouver un cycle de feux correct de longueur minimale !

Comment doit-on procéder pour cela ?