

Devoir surveillé n°1 (3 exercices) durée 1h30 – sans documents

Exercice 1. Questions de cours.

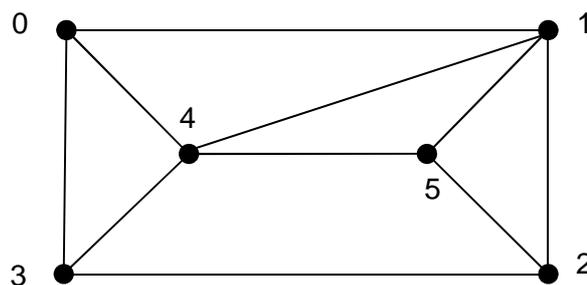
- 1.1 Qu'est-ce qu'un graphe non orienté connexe ?
- 1.2 Qu'est-ce qu'un cycle dans un graphe non orienté ? un cycle eulérien ?
- 1.3 Qu'est-ce qu'un graphe régulier ?
- 1.4 Qu'est-ce qu'un arbre ?
- 1.5 Qu'est-ce qu'une clique dans un graphe non orienté ?
- 1.6 Qu'est-ce que la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non) ?

Exercice 2. Complémentaire d'un graphe.

Le complémentaire d'un graphe non orienté G à n sommets est le graphe non orienté $\text{Compl}(G)$ à n sommets défini par :

uv est une arête de $\text{Compl}(G)$ si et seulement si uv n'est pas une arête de G

- 2.1 Dessinez le complémentaire du graphe ci-dessous. Quelle(s) propriété(s) possède le graphe obtenu ?

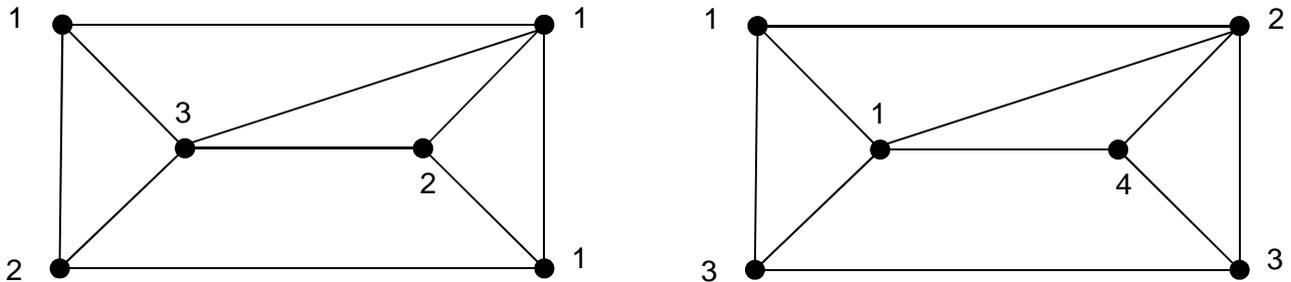


- 2.2 Écrire une action qui, à partir d'un graphe non orienté G à n sommets, construit le graphe H tel que $H = \text{compl}(G)$.
- 2.3 Écrire une fonction qui, à partir de deux graphes non orientés G et H à n sommets, détermine si $H = \text{Compl}(G)$.

Exercice 3. Colorations mystérieuses.

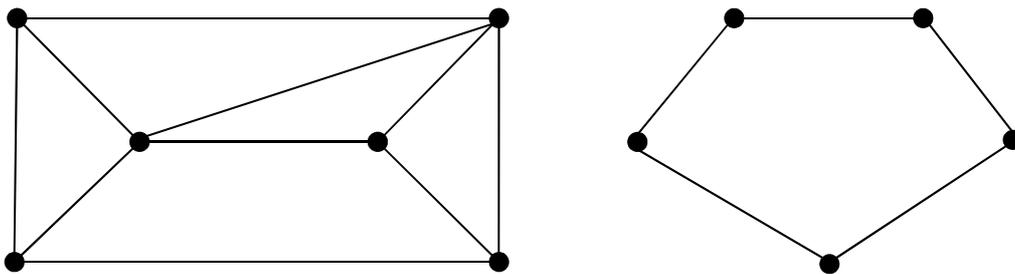
Soit G un graphe non orienté à n sommets. Une k -coloration mystérieuse de G est une application associant un entier pris dans l'ensemble $\{1, \dots, k\}$ à chaque sommet de G de façon telle que tout sommet ait au plus un voisin ayant la même couleur que lui. Le nombre chromatique mystérieux de G est alors le plus petit nombre k de couleurs nécessaire pour produire une k -coloration mystérieuse de G .

Considérons les deux colorations suivantes (les entiers sont les couleurs et non les numéros des sommets) :



La coloration de gauche n'est pas une coloration mystérieuse, car le sommet « en haut à droite » possède deux voisins ayant la même couleur que lui. La coloration de droite est bien une coloration mystérieuse car tout sommets a au plus un voisin ayant la même couleur que lui.

3.1 Proposez une coloration mystérieuse optimale (c'est-à-dire utilisant le moins de couleurs possible) pour chacun des deux graphes suivants :



- 3.2 Quel est le nombre chromatique mystérieux d'un graphe complet à n sommets ? Prouvez-le (ou, au moins, expliquez pourquoi...).
- 3.3 Quel est le nombre chromatique mystérieux d'un cycle à n sommets ? Prouvez-le (ou, au moins, expliquez pourquoi...).

On peut représenter une coloration d'un graphe par un tableau d'entiers, associant à chaque sommet sa couleur (on pourra ainsi définir un type TColoration).

3.4 Écrire une fonction qui, à partir d'un graphe non orienté G à n sommets et d'une coloration C , détermine si C est une coloration mystérieuse de G .

L'algorithme First-Fit peut être utilisé pour produire une coloration mystérieuse d'un graphe :

- On traite les sommets dans l'ordre 0, 1, etc.
 - Traiter un sommet consiste à lui attribuer la plus petite couleur possible (respectant la contrainte donnée dans la définition des colorations mystérieuses...).
- 3.5 Expliquez en une ou deux phrases les modifications à apporter à la version de l'algorithme First-Fit vue en TD.
- 3.6 Écrire une action ou une fonction qui, à partir d'un graphe non orienté G à n sommets, construit la coloration mystérieuse de G produite par l'algorithme First-Fit.